УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ

В.Л. МАТРОСОВ
Р.М. АСЛАНОВ
М.В. ТОПУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ВЛАДОС

УЧЕБНИК
ДЛЯ ВУЗОВ

В.Л. МАТРОСОВ
Р.М. АСЛАНОВ
М.В. ТОПУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Допущено
Министерством образования и науки
Российской Федерации в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности «Математика»

Москва
ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ВЛАДОС
2011

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.6я73
М 34

Рецензенты:

Луканкин Г.Л. — член-корреспондент РАО, доктор педагогических наук, профессор;
Грушин В.В. — доктор физико-математических наук, профессор;
Шадрин Г.А.— кандидат физико-математических наук, профессор

Матросов В.Л.

М34 Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» / В.Л. Матросов, Р.М. Асланов, М.В. Топунов. — М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2011. — 376 с. — (Учебник для вузов).

ISBN 978-5-691-01655-4.

Агентство CIP РГБ.

Учебник содержит тринадцать глав, в которых подробно рассмотрены основные определения и понятия, связанные с дифференциальными уравнениями, элементарные типы обыкновенных дифференциальных уравнений, линейные дифференциальные уравнения и их системы, применение операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений и многое другое.

Учебник полностью соответствует новому Государственному стандарту высшего профессионального образования и действующим программам и предназначен для студентов высших учебных заведений.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.6я73

© Матросов В.Л., Асланов Р.М., Топунов М.В., 2011
© ООО «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС», 2011
© Оформление. ООО «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС», 2011

ISBN 978-5-691-01655-4

Учебное издание

Матросов Виктор Леонидович
Асланов Рамиз Муталлим оглы
Топунов Михаил Владимирович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика»

Редактор *Н.Ф. Гребнева*
Зав. художественной редакцией *И.А. Пшеничников*
Художник обложки *М.Б. Патрушева*
Верстка *Г.С. Черткова*
Корректор *Т.Я. Кокорева*

Лицензия ИД № 03185 от 10.11.2000
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.60.953.Д.010192.08.09 от 28.08.2009 г.
Подписано в печать 20.04.07. Формат 60×90/16. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 23,5. Тираж 3000 экз. (1-й завод 1—500 экз.). Заказ № 1065.

Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС. 119571, Москва, просп. Вернадского, 88,
Московский педагогический государственный университет.
Тел. 437-11-11, 437-25-52, 437-99-98: тел./факс. 735-66-25.
E-mail: vlados@dol.ru http://www.vlados.ru

Отпечатано в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, д. 6
E-mail: 091-018@rambler.ru

Кто посвящает себя просвещению народа, ... тот сам в себе находит награду, он очищает свою совесть.

Г.Б. Зардаби

Предисловие

Дифференциальные уравнения являются основой для построения математических моделей разнообразных явлений природы и, таким образом, имеют огромное значения для ее изучения. Именно поэтому вопрос преподавания дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными в качестве дисциплины в высших педагогических учебных заведениях приобретает важное государственное значение. Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными имеют также огромное значение при изучении как математических дисциплин, так и нематематических наук.

Включение дифференциальных уравнений в школьную программу по математике несколько десятилетий назад явилось подтверждением вышесказанного. Преподавание курса дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными в качестве отдельной дисциплины математических специальностей в высших педагогических учебных заведениях имеет огромное значение и для преподавания курса математики в средней школе, и для всесторонней подготовки молодого поколения.

Преподаватели математики в средней школе, обладающие достаточными знаниями по дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными, могут не только строить свои уроки на уровне современных требований, но и содействовать преподаванию других дисциплин школьного курса, таких, как физика, химия, астрономия, информатика и вычислительная техника. Именно поэтому подготавливаемые по базовой программе учителя математики должны обладать широкими научными и практическими знаниями в области дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Настоящий учебник написан на основе лекций, которые на протяжении многих лет читались авторами на математических факультетах в педагогических вузах с учетом современных требований на основании всестороннего анализа вышедших за несколько десятилетий учебников, учебных пособий и монографий по дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными.

Авторы искренне надеются, что настоящий учебник окажется полезным как для студентов высших педагогических учебных заведений Российской Федерации, так и для всех, изучающих дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными.

Изучение курса «Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными» для студентов, обучающихся по специальности 032100 — математика, проходит в течение 7-го семестра (18 учебных недель, 65 учебных часов: лекции — 26 часов, практические занятия — 39 часов), а для студентов, обучающихся по специальности 032100.01 — математика с дополнительной специальностью информатика — в течение 5-го семестра (18 учебных недель, 54 учебных часа: лекции — 18 часов, практические занятия — 36 часов). По курсу «Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными» (по обоим специальностям) предусматривается проведение контрольной работы и экзамена.

Изучение математики важно в двух отношениях: во-первых, по сильному влиянию этой строгой науки на развитие умственных способностей, во-вторых, по обширности ее приложений.

М.В. Остроградский

Введение

Изучение дифференциальных уравнений в высших педагогических учебных заведениях имеет свою специфику, учитывающую будущую специальность их выпускников. Именно это обстоятельство играло решающую роль при отборе материала при написании настоящего учебника. Остановимся подробнее на некоторых его разделах.

Рассмотрение вопросов, связанных с интегрированием дифференциальных уравнений первого порядка, в том числе уравнений Лагранжа и Клеро, а также уравнений, допускающих понижение порядка, имеет целью выработать крайне необходимый будущему учителю профессионализм при проведении неэквивалентных преобразований различных выражений. Поскольку в процессе интегрирования производится преобразование дифференциального уравнения к более простому виду, при этом часто происходит потеря или приобретение решений. Одна их наиболее типичных и трудноустранимых ошибок школьников связана именно с неэквивалентными преобразованиями, поэтому подготовка учителя в этих вопросах должна быть безупречной.

Раздел программы, связанный с линейными дифференциальными уравнениями n-го порядка и системами линейных дифференциальных уравнений, предполагает нахождение решения неоднородного линейного дифференциального уравнения с правой частью специального вида (квазимногочлена). Как показывает практика, этот круг вопросов необходим для глубокого понимания теории линейных дифференциальных уравнений и их систем. Традиционное изложение соответствующего материала, по нашему мнению, слишком громоздко. Мы предлагаем методику изучения этих вопросов, основанную на применении операционного исчисления.

Для расширения кругозора студента педвуза, его необходимо познакомить и с историей возникновения и развития теории дифференциальных уравнений.

Цель дисциплины — формирование представлений о понятиях и методах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Для достижения данной

цели необходимо сформировать представления об основных типах дифференциальных уравнений (уравнения с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнения в полных дифференциалах, линейные уравнения с постоянными коэффициентами) и методах их решения; выработать умения и навыки исследования и решения обыкновенных дифференциальных уравнений, систем линейных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными; научить применять дифференциальные уравнения к решению различных физических задач.

В результате изучения курса «Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными» студент должен:

- усвоить основные понятия и определения;
- отчетливо знать формулировки и доказательства основных теорем существования и единственности, уметь их применять к конкретным дифференциальным уравнениям;
- решать простейшие дифференциальные уравнения первого порядка;
- овладеть общей теорией линейных дифференциальных уравнений и линейных систем дифференциальных уравнений и методами нахождения их решений;
- усвоить элементарные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и приобрести навыки как в решении примеров (в которых требуется найти решения данного уравнения, решить задачу Коши или краевую задачу, изучить свойства найденных решений), так и в решении задач на составление дифференциальных уравнений;
- уметь интегрировать простейшие уравнения с частными производными первого и второго порядка и решить соответствующую задачу Коши;
- определять по формуле Даламбера форму колеблющейся струны;
- усвоить метод Фурье.

Книга природы написана на языке математики.

Галилео Галилей

Раздел I
Обыкновенные дифференциальные уравнения

Глава 1
Основные определения и понятия

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные определения и понятия, связанные с дифференциальными уравнениями. Обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных. Задача Коши; общее, частное и особое решение. Огибающая. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Поле направлений, изоклины. Теорема существования и единственности.

§ 1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Дифференциальные уравнения образуют раздел математики, который теснейшим образом связывает общую математическую теорию с приложениями — например, к математической физике, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, механике, астрономии. Сегодня дифференциальные уравнения находят свое применение и в таких областях человеческой деятельности, которые, на первый взгляд, весьма далеки от математики — например, в медицине, криминалистике, социологии, генетики.

Задача, решаемая с помощью дифференциального уравнения, может быть кратко сформулирована как задача нахождения поведения объекта исследования в прошлом или предсказания его поведения в будущем, зная его положение в настоящий момент. Эта особенность дифференциальных уравнений настолько пора-

зила одного из их «создателей» — Исаака Ньютона, что он счел необходимым даже засекретить сделанное им открытие, посчитав его своим основным научным достижением. Все полученные им результаты он предъявил для опубликования лишь в виде утверждения «*Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa*», что можно перевести примерно так: «*Нет ничего более важного, чем решение дифференциальных уравнений*».

Известны многочисленные случаи использования дифференциальных уравнений для предсказания будущего. Так, Авиценна, имея представление о движении Солнца и Земли (которое описывается дифференциальными уравнениями), точно вычислил начало солнечного затмения. Это помогло ему остановить распространение в городе чумы, убедив жителей не выходить из своих домов, несмотря на большой религиозный праздник.

Дифференциальные уравнения позволяют описывать реально протекающие физические процессы. В качестве примера приведем следующую задачу.

Задача. Скорость распада радия прямо пропорциональна наличной его массе. Определить, какой процент массы m_0 радия распадется через 200 лет, если известно, что период полураспада радия равен 1590 лет.

Решение. Скорость распада радия определяется его количеством, распавшимся в единицу времени. Пусть $m(t)$ — зависимость количества наличного радия от времени. За малый промежуток времени Δt, истекший с некоторого момента времени t, количество распавшегося радия равно $km(t)\Delta t$, где k — коэффициент пропорциональности.

Это же количество, взятое с отрицательным знаком (поскольку масса радия убывает), равно приращению массы за время Δt:

$$\Delta m(t) = -km(t)\Delta t.$$

Разделив обе части последнего равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, приходим к уравнению

$$\frac{dm(t)}{dt} = -km(t). \qquad (1)$$

Разделив обе части уравнения на $m(t)$ и домножив на dt, получаем

$$\frac{dm(t)}{m(t)} = -kdt. \tag{2}$$

Умножение на dt могло привести к появлению у уравнения (2) посторонних корней, удовлетворяющих соотношению $dt = 0$, то есть

$$t = \text{const}.$$

Однако уравнение (2) не содержит таких решений, поскольку его решением может быть лишь функция, зависящая от переменной t. Таким образом, проведенное преобразование можно считать эквивалентным.

Деление на $m(t)$ могло привести к потере решений

$$m(t) = 0.$$

Мы, действительно, потеряли это решение: функция $m(t) = 0$ является решением уравнения (1), но не является решением уравнения (2), поскольку левая часть этого уравнения при $m(t) = 0$ теряет смысл. И хотя применительно к рассматриваемой задаче потерянное решение нас не интересует, тем не менее, строго говоря, для нахождения всех решений уравнения (1) следует рассмотреть не уравнение (2), а следующую совокупность, эквивалентную уравнению (1):

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dm(t)}{m(t)} = -k\,dt, \\ m(t) = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Интегрируя обе части первого уравнения полученной совокупности (3), находим

$$\left[\begin{array}{l} \ln\left|m(t)\right| = -kt + \tilde{C}, \\ m(t) = 0, \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} m(t)=e^{\tilde{C}}e^{-kt}, \\ m(t)=-e^{\tilde{C}}e^{-kt}, \\ m(t)=0. \end{array}\right. \qquad (4)$$

Все три соотношения совокупности (4) могут быть объединены в одно:

$$m(t)=Ce^{-kt}, \qquad (5)$$

где C — произвольная постоянная.

Действительно, при положительном значении C получаем первое соотношение совокупности (4), при отрицательном — второе, а при $C=0$ получаем третье соотношение этой совокупности.

Параметры C и k мы определим из условий задачи. Поскольку в начальный момент времени $t=0$ количество радия составляло m_0, то

$$m\big|_{t=0}=m_0,$$

или, с учетом формулы (5),

$$m_0=Ce^{-0k},$$

откуда

$$C=m_0,$$

и, таким образом,

$$m(t)=m_0e^{-kt}.$$

Коэффициент k находим из условия

$$m\big|_{t=1590}=\frac{1}{2}m_0,$$

то есть

$$\frac{1}{2}m_0=m_0e^{-1590k}$$

откуда

$$k = \frac{\ln 2}{1590} \approx 0{,}00044.$$

Итак, искомая функция имеет вид

$$m(t) = m_0 e^{-0{,}00044t},$$

а количество радия, не распавшегося через 200 лет, составляет

$$m(200) = m_0 e^{-0{,}00044 \cdot 200} \approx 0{,}915 m_0,$$

следовательно, через 200 лет распадется лишь около 8,5% радия.

Ответ: 8,5%.

§ 2. Основные определения и понятия, связанные с дифференциальными уравнениями

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1)$$

где x — независимая переменная, а y — искомая функция.

Если функция $y = y(x)$ есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***. В противном случае оно называется ***дифференциальным уравнением с частными производными***.

Дифференциальное уравнение

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0,$$

где u — искомая функция от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется ***дифференциальным уравнением с частными производными k-го порядка***.

Дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где u — искомая функция от двух независимых переменных x и t, называется ***волновым уравнением***; оно будет нами изучено ниже.

Решением дифференциального уравнения (1) называется непрерывно дифференцируемая n раз функция $y = \varphi(x)$, обращающая дифференциальное уравнение (1) в тождество на некотором интервале. Этот интервал может быть как конечным, так и бесконечным в одну или обе стороны, а также замкнутым с одного или обоих концов.

Решение дифференциального уравнения может быть представлено как в явном, так и в неявном, а также в параметрическом виде.

Пример. Решение дифференциального уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}$$

на интервале $(-1, 1)$ представимо функцией

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Решение этого уравнения также представимо в неявном виде

$$x^2 + y^2 = 1,$$

а также в параметрическом виде:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Нахождение решения дифференциального уравнения называется его ***интегрированием***. Задача интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении всех решений этого уравнения и в изучении их свойств.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Если левая часть дифференциального уравнения (1) есть целая рациональная функция (полином) относительно всех входящих в него произ-

водных, то наивысшая степень старшей производной называется ***степенью*** дифференциального уравнения.

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

то такое уравнение называется ***дифференциальным уравнением, разрешенным относительно старшей производной***.

Пример 1. Уравнение

$$y' = y''x + \left(y''\right)^2$$

является дифференциальным уравнением второго порядка, неразрешенным относительно старшей производной.

Пример 2. Уравнение

$$y''' = y''x + \left(y''\right)^2$$

есть дифференциальное уравнение третьего порядка, разрешенное относительно старшей производной.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right). \tag{2}$$

Мы будем предполагать, что правая часть дифференциального уравнения (2) непрерывна. Наряду с уравнением (2) рассматривают так называемое ***перевернутое дифференциальное уравнение***

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f\left(x, y\right)}, \tag{3}$$

в окрестности тех точек, в которых функция $f\left(x, y\right)$ становится бесконечно большой.

Отметим другие формы записи дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Так, дифференциальные уравнения (2) и (3) могут быть записаны в виде

$$dy - f\left(x, y\right)dx = 0.$$

К уравнениям вида (2) и (3) приводятся уравнения вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

и так называемое уравнение в симметрической форме

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}.$$

Функция

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$$

называется ***общим решением*** дифференциального уравнения (1), если при любом выборе постоянных $C_1, \ldots, C_n$ она является решением этого уравнения, а, с другой стороны, любое частное решение этого уравнения может быть получено из функции $\varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ при соответствующем выборе постоянных $C_1, \ldots, C_n$.

Уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$$

называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения (1), если при любом выборе постоянных $C_1, \ldots, C_n$ она неявным образом определяет решение дифференциального уравнения (1), а, с другой стороны, любое частное решение дифференциального уравнения (1) может быть получено из этого уравнения при соответствующем выборе постоянных $C_1, \ldots, C_n$.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (1) называется задача отыскания такого его решения, которое удовлетворяет условиям вида

$$y(x_0) = y_0,$$

$$y'(x_0) = y_0',$$

$$y''(x_0) = y_0'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

Указанные выше условия называются ***начальными условиями***, а искомое решение — ***частным решением*** дифференциального уравнения, удовлетворяющим заданным начальным условиям. Решение дифференциального уравнения называется ***особым решением***, если в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши. Как правило, особые решения — это те решения, которые могут быть потеряны при преобразованиях дифференциального уравнения в процессе нахождения его общего решения.

Заметим, что дифференциальное уравнение может иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми. Например, такими решениями будут решения, склеенные из отрезков частных и особых решений (возможна также склейка двух частных решений в точке неединственности задачи Коши).

График решения дифференциального уравнения на плоскости xOy называется ***интегральной кривой***.

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения дифференциального уравнения (1), а D_{y_1} и D_{y_2} — их области определения, соответственно. Если $D_{y_1} \subset D_{y_2}$ и $y_1(x) = y_2(x)$ для всех $x \in D_{y_1}$, то будем говорить, что решение $y_2(x)$ является ***продолжением*** решения $y_1(x)$. Решение дифференциального уравнения (1) называется ***непродолжаемым***, если любое его продолжение совпадает с ним самим. Например, семейство $y = x + C$ есть множество всех непродолжаемых решений дифференциального уравнения $y' = 1$.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}. \tag{4}$$

Оно эквивалентно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = dx, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

или же, после интегрирования,

$$\left[\begin{array}{l} y^{\frac{1}{3}} = x + C, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=(x+C)^3, \\ y=0. \end{array}\right. \qquad (5)$$

Заметим, что семейство решений $y=(x+C)^3$ является общим решением, а решение $y=0$ — особым решением дифференциального уравнения (4).

Геометрически полученные интегральные кривые представляют собой семейство кубических парабол, а также ось Ox. Эти интегральные кривые покрывают всю плоскость xOy и каждая из них соответствует непродолжаемому решению дифференциального уравнения (4).

Рассмотрим функцию

$$y(x)=\begin{cases} (x+1)^3, & x<-1, \\ 0, & |x|\le 1, \\ (x-1)^3, & x>1. \end{cases}$$

Она состоит из двух «кусков» кубических парабол и отрезка оси Ox и, очевидно, является решением дифференциального уравнения (4) (в «точках стыка» $x=\pm 1$ функция $y(x)$ имеет производную, равную нулю, так что $y'=0=3y^{\frac{1}{3}}$), хотя не является ни частным, ни особым решением. Это решение является непродолжаемым, поскольку оно определено на всей числовой оси, однако оно не содержится в совокупности (5). Следовательно, совокупность (5) не содержит не только все решения, но даже все непродолжаемые решения дифференциального уравнения (4).

Заметим, что в данной задаче множество всех непродолжаемых решений можно записать в явном виде:

$$y=\begin{cases} (x-C_1)^3, & x<C_1, \\ 0, & C_1\le x\le C_2, \\ (x-C_2)^3, & x>C_2. \end{cases}$$

Геометрический смысл задачи Коши для уравнения первого порядка состоит в нахождении его интегральной кривой, проходящей через заданную точку. Для уравнения второго порядка геометрический смысл задачи Коши состоит в нахождении интегральной кривой этого уравнения, проходящей через заданную точку и имеющую в ней заданный угол наклона касательной. Для уравнения

третьего порядка он состоит в нахождении его интегральной кривой, проходящей через заданную точку, имеющую в ней заданный угол наклона касательной и заданный радиус кривизны.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2. \tag{6}$$

Решение. Правая часть уравнения определена и непрерывна при всех значениях y и не обращается в нуль. Так как при этом она положительна, то все интегральные кривые возрастают при всех значениях x, при которых они определены. Перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + y^2} \tag{7}$$

имеет общее решение

$$x = \operatorname{arctg} y + C \tag{8}$$

в области

$$|y| < +\infty, \quad |x| < +\infty. \tag{9}$$

Следовательно, формула (8) дает общий интеграл уравнения (6). Общим решением уравнения (7) будет функция

$$y = \operatorname{tg}(x + C_1), \quad -\frac{\pi}{2} - C_1 < x < \frac{\pi}{2} - C_1. \tag{10}$$

Особых решений нет.

Мы придем к тем же результатам, если будем интегрировать уравнение (7) иным способом. Действительно, умножая обе части уравнения (7) на dx и деля на $1 + y^2$, получим

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx. \tag{11}$$

При этом мы не теряем решений уравнения (6), ибо делитель $1 + y^2$ не обращается в нуль ни при каком вещественном значении y. Интегрируя уравнение (11), находим:

$$\operatorname{arctg} y = x + C. \tag{12}$$

Это и есть общий интеграл уравнения (6).

Общим интегралом в форме Коши будет соотношение

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{1+y^2} = x - x_0$$

или

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_0 = x - x_0 . \qquad (13)$$

Особых решений нет, ибо нет даже кривых, подозрительных на особое решение, так как при переходе от уравнения (6) к уравнению (11) мы не теряем никаких решений уравнения (6).

Найдем решение с начальными условиями

$$y(0) = 0.$$

Полагая в (12) $x = 0$, $y = 0$, имеем

$$C = 0,$$

так что искомым решением будет

$$\operatorname{arctg} y = x$$

или

$$y = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \qquad (14)$$

К этому же решению мы придем, воспользовавшись формулой общего интеграла в форме Коши. Действительно, полагая в формуле (13)

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0,$$

получаем снова решение (14).

Прямые

$$x = \pm\frac{\pi}{2}$$

являются асимптотами этого решения (см. рис. 1).

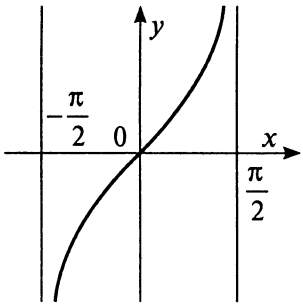

Рис. 1

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2. \qquad (15)$$

Решение. Правая часть определена и непрерывна при всех значениях y, но обращается в нуль при $y = \pm 1$. Будем интегрировать уравнение (15), разделяя переменные:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{1-y^2} = dx, \\ 1 - y^2 = 0, \end{array}\right. \qquad (16)$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y+1}{y-1}\right| = x + C, \\ 1 - y^2 = 0, \end{array}\right. \qquad (17)$$

есть общий интеграл уравнения (15). Решая уравнение

$$1 - y^2 = 0,$$

находим

$$y = \pm 1.$$

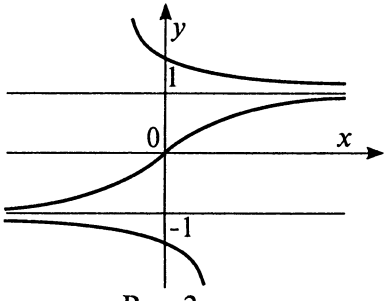

Рис. 2

Эти прямые являются частными решениями. Интегральные кривые, лежащие внутри полосы $|y| < 1$, возрастают, лежащие вне ее — убывают.

Решения $y = \pm 1$ являются асимптотами интегральных кривых (17) (см. рис. 2).

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}. \tag{18}$$

Решение. Здесь правая часть определена и непрерывна в интервале $[-1, 1]$, причем на концах этого интервала она обращается в нуль.

Интегрируя уравнение (18), имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx, \\ \sqrt{1-y^2} = 0, \end{array}\right.$$

так что общим интегралом уравнения (18) будет

$$\arcsin y = x + C,$$

откуда

$$y = \sin(x + C), \quad -\frac{\pi}{2} - C < x < \frac{\pi}{2} - C. \tag{19}$$

Из уравнения

$$\sqrt{1-y^2} = 0$$

находим прямые

$$y = \pm 1.$$

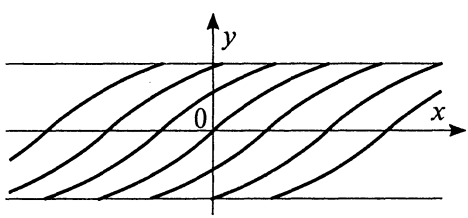

Рис. 3

Эти прямые являются особыми решениями, так как они представляют собой огибающие семейства интегральных кривых, входящих в общее решение (19) (см. рис. 3).

Далеко не все дифференциальные уравнения (даже имеющие достаточно простой вид) могут быть проинтегрированы. В таких случаях информацию об их решениях может дать так называемое ***геометрическое интегрирование***. Его основные идеи мы рассмотрим на примере дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной:

$$y' = f(x, y). \tag{20}$$

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой области G плоскости xOy. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит области G, а функция $y = \varphi(x)$ является решением дифференциального уравнения (20), таким, что его интегральная кривая проходит через точку $M(x, y)$.

Тогда дифференциальное уравнение (20) определяет значение производной y' в этой точке, т. е. тангенс угла наклона к оси Ox касательной к кривой $y = \varphi(x)$ в точке $M(x, y)$. Таким образом, функция $f(x, y)$ задает ***поле направлений*** — она задает направление интегральной кривой, проходящей через каждую точку $M(x, y)$ области G. С учетом этого, задача интегрирования дифференциального уравнения (20) может быть сформулирована как задача нахождения кривой, касательная к которой в каждой точке имеет направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

При изучении поля направлений особый интерес представляют линии, во всех точках которых направление поля одно и то же.

Изоклиной дифференциального уравнения (20) называется линия на плоскости xOy, такая, что интегральные кривые уравнения (20) пересекают ее под одним и тем же углом наклона к оси Ox.

Если в некоторой точке (x_0, y_0) правая часть дифференциального уравнения (20) обращается в бесконечность, то направление поля параллельно оси Oy. Если же в некоторой точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ обращается в неопределенность, то говорят, что в этой точке поле не определено. Такие точки будем называть ***особыми точками*** дифференциального уравнения (20).

Если существует интегральная кривая $y = y(x)$ (или $x = x(y)$), такая, что

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y_0$$

или

$$\lim_{y \to y_0} x(y) = x_0,$$

то говорят, что эта интегральная кривая ***примыкает*** к особой точке (x_0, y_0).

Пусть задано некоторое семейство интегральных кривых дифференциального уравнения первого порядка. Будем называть ***огибающей*** кривую, в каждой своей точке касающейся некоторой кривой этого семейства. Следовательно, в каждой точке огибающая имеет направление, определяемое дифференциальным уравнением, поэтому она является интегральной кривой; с другой стороны, в каждой ее точке нарушается единственность. Таким образом, огибающая является графиком особого решения дифференциального уравнения.

Пусть семейство интегральных кривых задано уравнением

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{21}$$

Для нахождения огибающей рассмотрим некоторую ее точку (x, y), которая одновременно принадлежит некоторой кривой семейства (21). Этой кривой отвечает некоторое значение параметра C. Следовательно, для всех точек огибающей выполнено равенство

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0. \tag{22}$$

Из этого уравнения мы найдем угловой коэффициент касательной к огибающей в точке (x, y), для чего продифференцируем (22) по x:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right) y' = 0. \tag{23}$$

С другой стороны, угловой коэффициент к кривой семейства (21), проходящей через точку (x, y), определяется из соотношения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0. \tag{24}$$

Поскольку эти угловые коэффициенты должны быть равны, то из соотношений (23) и (24) находим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\right)=0,$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C}=0,$$

поскольку

$$C(x, y)\neq \text{const}.$$

Таким образом, огибающая определяется из системы

$$\begin{cases}\Phi(x, y, C)=0,\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial C}=0.\end{cases}$$

Пример. Найдем огибающую для дифференциального уравнения

$$y^2\left(1+y'^2\right)=R^2.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$(x-C)^2+y^2=R^2$$

(проверьте самостоятельно!). Это — семейство окружностей радиуса R с центром на оси абсцисс.

Тогда

$$\Phi(x, y, C)=(x-C)^2+y^2-R^2$$

и огибающая определяется из системы

$$\begin{cases}\Phi(x, y, C)=(x-C)^2+y^2-R^2=0,\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial C}=-2(x-C)=0,\end{cases}$$

то есть

$$x = C,$$

откуда

$$y = \pm R. \tag{25}$$

Итак, огибающими являются прямые, определяемые уравнениями (25) (изобразите на координатной плоскости рассмотренные интегральные кривые, и проверьте, что уравнения (25) определяют огибающие!).

Изучая поле направлений и изоклины, определяемые данным дифференциальным уравнением, можно получить представление о поведении интегральных кривых этого уравнения, а иногда и сами интегральные кривые.

Пример 1. Из рассмотрения поля направлений и изоклин для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{x} \tag{26}$$

вытекает, что интегральными кривыми являются полупрямые

$$y = Cx, \quad x \neq 0$$

и

$$x = 0, \quad y \neq 0,$$

с центром в начале координат, где C — произвольная постоянная (проверьте самостоятельно!).

Пример 2. Интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{27}$$

служат окружности с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = C^2,$$

где C — произвольная постоянная (проверьте самостоятельно!).

В особой точке (0, 0) поле направлений для дифференциального уравнения (26) параллельно оси Oy, а значение поля направлений для дифференциального уравнения (27) не определено. Из рассмотрения структуры семейств интегральных кривых для этих уравнений вытекает, что интегральные кривые для уравнения (26) примыкают к точке (0, 0), в то время, как ни одна из интегральных кривых дифференциального уравнения (27) не примыкает к этой точке.

Пример 3. Для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{28}$$

изоклинами являются прямые вида

$$y = b$$

(см. рис. 4). Изоклина

$$y = 0$$

является интегральной кривой.

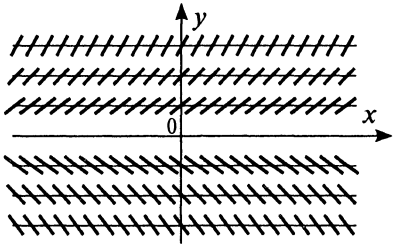

Рис. 4

В верхней полуплоскости интегральные кривые возрастают с ростом x, а в нижней убывают.

Исследуем направление вогнутости интегральных кривых. Дифференцируя обе части уравнения (28), имеем

$$y'' = y'$$

или, принимая во внимание уравнение (28),

$$y'' = y$$

Отсюда ясно, что в верхней полуплоскости интегральные кривые вогнуты вверх, а в нижней — вниз.

Интегрируя уравнение (28), имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} = dx, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln|y| = x + C_1, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

откуда получаем общее решение

$$y = C_1 e^x.$$

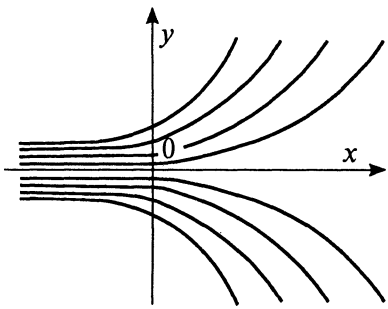

Рис. 5

Из полученной формулы общего решения легко видеть, что все отмеченные выше свойства интегральных кривых имеют место. Кроме того видно, что интегральные кривые не могут пересекать ось Ox. Сама ось Ox является решением уравнения (28) и притом частным. Она представляет собой горизонтальную асимптоту всех других интегральных кривых уравнения (28) (см. рис. 5).

Пример 4. Составить дифференциальное уравнение семейства показательных функций

$$y = C e^{kx}, \tag{29}$$

где k — заданное число, а C — параметр семейства.

Решение. Дифференцируя обе части равенства (29) по x, имеем

$$y' = kCe^{kx}. \tag{30}$$

Заменяя Ce^{kx} на y, получаем

$$y' = ky. \tag{31}$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение. Его решениями будут все показательные функции (29) и функция $y = 0$, содержащаяся в формуле (29) при $C = 0$.

Общее свойство всех этих функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению, а следовательно, и общее дифференциальное свойство всех показательных функций (29) состоит в том, что скорость изменения каждой функции пропорциональна значению самой функции.

Именно этим объясняется тот факт, что законы многих процессов выражаются в виде показательной функции. Таков, например, закон распада радиоактивного вещества.

Пример 5. Составить дифференциальное уравнение семейства полупарабол

$$y = (x + C)^2, \quad x \geq -C. \tag{32}$$

Решение. Дифференцируя обе части уравнения (32) по x, получаем

$$y' = 2(x + C). \tag{33}$$

Исключим C из уравнений (32) и (33): из уравнения (32) находим

$$x + C = \sqrt{y}$$

(радикал берем с положительным знаком, поскольку, по условию, $x + C \geq 0$).

Подставляя найденное значение $x + C$ в равенство (33) получаем дифференциальное уравнение

$$y' = 2\sqrt{y}.$$

Общее свойство всех интегральных кривых, выражаемое этим уравнением, а следовательно, и общее свойство всех полупарабол (32) состоит в том, что касательная к ним образует с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен удвоенному корню из ординаты точки касания (при этом сам угол для всех кривых (32) — острый).

Интегральными кривыми этого уравнения будут полупараболы (32) и их огибающая

$$y = 0,$$

являющаяся особым решением.

Пример 6. С помощью изоклин построим интегральные кривые дифференциального уравнения

$$y' = 2x - y.$$

Для получения уравнения изоклин положим

$$y' = k, \quad k = \text{const}.$$

Имеем

$$2x - y = k$$

или

$$y = 2x - k.$$

Изоклинами является семейство параллельных прямых. При $k = 0$ получим изоклину

$$y = 2x.$$

Эта прямая делит плоскость xOy на две части, в каждой из которых производная y' имеет один и тот же знак.

Интегральные кривые, пересекая прямую $y = 2x$, переходят из области убывания функции y в область возрастания и наоборот, а значит, на этой прямой находятся точки экстремума интегральных кривых — именно, точки минимума.

Возьмем еще две изоклины:

$$y = 2x + 1 \ (\text{при } k = -1)$$

и

$$y = 2x - 1 \ (\text{при } k = 1).$$

Касательные, проведенные к интегральным кривым в точках пересечения с этими изоклинами, образуют с осью Ox углы в 135° и 45° соответственно.

Найдем вторую производную:

$$y'' = 2 - y' = 2 - 2x + y.$$

Прямая

$$y = 2x - 2,$$

на которой вторая производная обращается в нуль, является изоклиной, получаемой при $k = 2$, и в то же время — интегральной кривой, в чем легко убедиться подстановкой. Так как правая часть данного уравнения удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности во всей плоскости xOy, то остальные интегральные кривые не пересекают эту изоклину.

Изоклина $y = 2x$, на которой находятся точки минимума интегральных кривых, расположена над изоклиной $y = 2x - 2$, а поэтому интегральные кривые, проходящие ниже изоклины $y = 2x - 2$, не имеют точек экстремума.

Прямая $y = 2x - 2$ делит плоскость xOy на две части, в одной из которых (расположенной над этой прямой)

$$y'' > 0,$$

а значит, интегральные кривые выпуклы вниз, а в другой

$$y'' < 0,$$

и значит, интегральные кривые выпуклы вверх. Так как интегральные кривые не пересекают прямой $y = 2x - 2$, то она не является геометрическим местом точек перегиба. Следовательно, интегральные кривые данного уравнения не имеют точек перегиба.

Проведенное исследование позволяет приближенно построить семейство интегральных кривых рассматриваемого дифференциального уравнения — сделайте соответствующий рисунок самостоятельно.

§ 3. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка

Для доказательства теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка нам понадобятся следующие определения и теоремы.

Будем говорить, что функция $f(x,y)$ в области $D \subset \mathrm{R}^2$ удовлетворяет ***условию Липшица (по y)***, если для любых точек (x, y_1) и (x, y_2) в области D имеет место неравенство

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|,$$

где L — некоторое положительное число.

Очевидно, что если $\left| f'_y(x, y) \right| \le L$, то функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица (проверьте самостоятельно!).

Множество M называется ***метрическим пространством***, если на нем задана функция

$$\rho : M \times M \to \mathrm{R},$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\rho(x, y) \ge 0$ и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$

для любых $x, y, z \in M$.

Число $\rho(x, y)$ называется ***расстоянием*** между точками x и y.

Последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства M называется ***фундаментальной последовательностью***, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε, такой, что для любых номеров $n_1, n_2 > N_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\rho\left(x_{n_1}, x_{n_2}\right) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство называется ***полным***, если любая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел.

Пусть M — метрическое пространство. Отображение

$$A : M \to M$$

называется ***сжимающим отображением***, если существует число $0 < \alpha < 1$, такое, что

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$$

для любых $x, y \in M$.

Точка $x_0 \in M$ называется ***неподвижной точкой*** отображения A, если

$$Ax_0 = x_0.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *В полном метрическом пространстве любое сжимающее отображение имеет единственную неподвижную точку.*

Теорема (существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка). *Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка*

$$y' = f(x, y), \tag{34}$$

где функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости xOy, содержащей точку (x_0, y_0). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D и удовлетворяет условию Липшица (по y) в области D, то существует отрезок $[x_0 - d, x_0 + d]$, на котором существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(x_0) = y_0. \tag{35}$$

Доказательство. 1. Уравнение (34) вместе с начальным условием (35) эквивалентно уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, y(u))du. \tag{36}$$

Действительно, пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (34) и начальному условию (35). Запишем тождество:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)),$$

которое представимо в виде

$$d\varphi(x) \equiv f(x, \varphi(x))dx.$$

Проинтегрируем обе его части от x_0 до x:

$$\int_{x_0}^{x} d\varphi(x) \equiv \int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u))du$$

или

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u))du,$$

т. е. функция $\varphi(x)$ обращает в тождество уравнение (36).

Покажем обратное. Пусть функция $\varphi(x)$ является решением уравнения (36), то есть

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u))du.$$

Найдем ее производную:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)),$$

следовательно, функция $\varphi(x)$ обращает в тождество уравнение (34) и удовлетворяет начальному условию (35), поскольку

$$\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(u, \varphi(u))du = y_0.$$

2. Выделим в области D замкнутую ограниченную область D', содержащую внутри себя точку (x_0, y_0). Поскольку D' — компакт, функция $f(x,y)$ на нем ограничена, т. е. существует число k, такое, что

$$|f(x, y)| \le k.$$

Выберем прямоугольник P с центром в точке (x_0, y_0) со сторонами, параллельными осям координат:

$$P = [x_0 - d, x_0 + d] \times [y_0 - kd, y_0 + kd],$$

так, чтобы

$$d < \frac{1}{L}$$

и

$$P \subset G'.$$

Множество C^* всевозможных непрерывных функций $\{\varphi(x)\}$, проходящих через точку (x_0, y_0), график которых лежит в прямоугольнике P, с расстоянием, определенным соотношением

$$\rho(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \max_{[x_0-d,\, x_0+d]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

является полным метрическим пространством (проверьте самостоятельно!).

3. Возьмем произвольную функцию $\varphi(x) \in C^*$ и подставим в правую часть уравнения (36):

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u))du.$$

Заметим, что функция $\varphi_1(x)$ непрерывна по свойству интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции.

Кроме того, график функции $\varphi_1(x)$ проходит через точку (x_0, y_0), поскольку

$$\varphi_1(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(u, \varphi(u))du = y_0.$$

Наконец, график функции $\varphi_1(x)$ лежит в прямоугольнике P, поскольку

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u))du\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(u, \varphi(u))|du\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} k\,du\right| = k|x - x_0| \le kd.$$

Таким образом,

$$\varphi_1(x) \in C^*,$$

т. е., мы построили отображение

$$A : C^* \to C^*,$$

и образ функции $\varphi(x)$ будем обозначать через $A\varphi(x)$.

4. Осталось доказать, что A — сжимающее отображение. Для этого возьмем две функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C^*$ и рассмотрим расстояние между их образами $A\varphi_1$ и $A\varphi_2$:

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) = \max_{[x_0-d,\, x_0+d]} |A\varphi_1(x) - A\varphi_2(x)| =$$

$$= \max_{[x_0-d,\, x_0+d]} \left|\int_{x_0}^{x} \big(f(u, \varphi_1(u)) - f(u, \varphi_2(u))\big)du\right| \le$$

$$\leq \max_{[x_0-d,\, x_0+d]} \left| \int_{x_0}^{x} \left| f\left(u,\, \varphi_1(u)\right) - f\left(u,\, \varphi_2(u)\right) \right| du \right| \leq$$

$$\leq \max_{[x_0-d,\, x_0+d]} \left| \int_{x_0}^{x} L \left| \varphi_1(u) - \varphi_2(u) \right| du \right| \leq$$

$$\leq \max_{[x_0-d,\, x_0+d]} \left| \int_{x_0}^{x} L \max_{[x_0-d,\, x_0+d]} \left| \varphi_1(u) - \varphi_2(u) \right| du \right| = \max_{[x_0-d,\, x_0+d]} \left| \int_{x_0}^{x} L\rho\left(\varphi_1,\, \varphi_2\right) du \right| =$$

$$= \rho\left(\varphi_1,\, \varphi_2\right) L \max_{[x_0-d,\, x_0+d]} \left| \int_{x_0}^{x} du \right| = \rho\left(\varphi_1,\, \varphi_2\right) L \max_{[x_0-d,\, x_0+d]} \left| x - x_0 \right| =$$

$$= \rho\left(\varphi_1,\, \varphi_2\right) Ld < \rho\left(\varphi_1,\, \varphi_2\right) L \frac{1}{L} = \rho\left(\varphi_1,\, \varphi_2\right).$$

Итак, A — сжимающее отображение, следовательно, по теореме о сжимающем отображении, существует единственная функция $\varphi(x)$, для которой

$$A\varphi(x) = \varphi(x),$$

то есть

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(u, \varphi(u)\right) du.$$

По доказанному выше, эта функция является решением дифференциального уравнения (34), удовлетворяющим начальному условию (35). **Теорема доказана**.

Оказывается, для существования искомого решения достаточно потребовать непрерывности функции $f(x, y)$. Единственность же гарантируется условием Липшица — в тех точках, где это условие не выполнено, единственность может нарушаться.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = y^{\frac{2}{3}}.$$

Здесь функция

$$f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$$

непрерывна, а функция

$$f'_y(x, y) = \frac{2}{3}\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}$$

разрывна в каждой точке оси абсцисс. Поэтому условие единственности не выполняется.

Пример 2. Областью существования и единственности решения дифференциального уравнения

$$y' = xy + e^{-y}$$

является вся плоскость xOy, поскольку функции

$$f(x, y) = xy + e^{-y}$$

и

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x - e^{-y}$$

непрерывны в каждой точке координатной плоскости.

Дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad (37)$$

называется ***линейным дифференциальным уравнением***. Линейные дифференциальные уравнения обладают рядом замечательных свойств, благодаря которым теория линейных дифференциальных уравнений является наиболее развитым разделом общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В частности, если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (38)$$

называется ***линейным однородным***, а в противном случае — ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением***. Говорят, что однородное уравнение (38) ***соответствует*** неоднородному уравнению (37).

Если в линейном дифференциальном уравнении все коэффициенты $a_i(x) = \text{const}$, то такое уравнение называется ***линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами***.

Можно показать, что если функции $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ непрерывны на некотором интервале (a, b), то для любого набора чисел (начальных условий)

$$\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right),$$

где $a < x_0 < b$, существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (37) (и (38)), удовлетворяющее заданным начальным условиям, то есть такое, что

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0'', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.

Леонардо да Винчи

Глава 2
Элементарные типы дифференциальных уравнений

Простейший тип дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной; уравнения Лагранжа и Клеро. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

§ 1. Простейший тип дифференциальных уравнений

К ***простейшему типу дифференциальных уравнений*** относятся уравнения вида

$$y' = f(x)$$

или же

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на некотором отрезке $[a,b]$.

Нетрудно видеть, что решением этого уравнения будет служить любая первообразная функции $f(x)$. Следовательно, уравнение имеет бесконечное множество решений, которые отличаются на константу; одним из них, как известно, является интеграл

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \tag{1}$$

при любом $x_0 \in [a,b]$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Общее решение простейшего дифференциального уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

задается формулой

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C$$

причем через каждую точку полосы $a \le x \le b$ *проходит единственная интегральная кривая.*

Из полученного общего решения можно выделить частное решение, задав начальное условие, то есть, указав точку, через которую должна проходить интегральная кривая:

$$y(x_0) = y_0.$$

Положим в формуле (1) $x = x_0$; тогда, согласно начальному условию, $y = y_0$ и мы имеем:

$$y_0 = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx + C,$$

откуда $C = y_0$.

Таким образом, частное решение имеет вид

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0.$$

§ 2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y).$$

Теорема. *Пусть в некотором прямоугольнике*

$$Q = \{ a < x < b, \quad c < y < d \}$$

функции $f(x)$ *и* $\varphi(y)$ *непрерывны, причем* $\varphi(y) \neq 0$.

Тогда через каждую точку $(x_0, y_0) \in Q$ *проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y).$$

Доказательство. Предположим, что рассматриваемое уравнение имеет искомое решение, т. е. существует функция $y(x)$, обращающая это уравнение в тождество и такая, что

$$y(x_0) = y_0.$$

Подставим это решение в уравнение:

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x)\varphi(y(x))$$

или же

$$\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))} \equiv f(x)\,dx.$$

Пусть $\Phi(y)$ — первообразная для $\dfrac{1}{\varphi(y)}$, а $\Psi(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е.

$$\Phi'(y) = \frac{1}{\varphi(y)} \text{ и } \Psi'(x) = f(x).$$

Такие первообразные найдутся, поскольку функции $\dfrac{1}{\varphi(y)}$ и $f(x)$ непрерывны.

Если дифференциалы двух функций тождественно равны, то сами функции отличаются на константу, поэтому

$$\Phi(y(x)) \equiv \Psi(x) + C. \tag{2}$$

С учетом начального условия $y(x_0) = y_0$ имеем

$$\Phi(y_0) = \Psi(x_0) + C,$$

откуда

$$C = \Phi(y_0) - \Psi(x_0).$$

Подставим найденное выражение в (2) и получим

$$\Phi(y(x)) \equiv \Psi(x) + \Phi(y_0) - \Psi(x_0). \qquad (3)$$

Таким образом, искомое решение $y = y(x)$ является решением алгебраического уравнения

$$\Phi(y(x)) - \Psi(x) - \Phi(y_0) + \Psi(x_0) = 0.$$

Это уравнение определяет $y(x)$ как неявную функцию. Воспользуемся теоремой о неявной функции и проверим, что она существует.

Функция

$$F(x, y) = \Phi(y(x)) - \Psi(x) - \Phi(y_0) + \Psi(x_0)$$

обращается в нуль в точке (x_0, y_0), непрерывна, ее частная производная по y

$$F'_y(x, y) = \Phi'_y(y(x)) = \frac{1}{\varphi(y)}$$

непрерывна и отлична от нуля. Следовательно, это уравнение имеет единственное решение, проходящее через точку (x_0, y_0). Будет ли оно удовлетворять исходному дифференциальному уравнению? Продифференцируем тождество (3) по x:

$$\Phi'_y y'(x) \equiv \Psi'_x(x),$$

то есть

$$\frac{1}{\varphi(y(x))}\frac{dy}{dx} \equiv f(x),$$

то есть функция $y = y(x)$ удовлетворяет исходному уравнению. **Теорема доказана.**

Из доказанной теоремы вытекает метод решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными — общее решение задается как неявная функция уравнением

$$\Phi(y)=\Psi(x)+C,$$

или, в интегральной форме,

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)\,dx+C.$$

Более того, как нетрудно видеть, соотношение

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx$$

определяет частное решение, которое удовлетворяет начальному условию

$$y(x_0)=y_0.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by), \tag{4}$$

где a и b — постоянные, сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены

$$t=ax+by,$$

где $t=t(x)$ — новая неизвестная функция независимой переменной x. При этом

$$\frac{dt}{dx}=a+b\frac{dy}{dx},$$

так что дифференциальное уравнение (4) принимает вид

$$\frac{dt}{dx}=a+bf(t).$$

В результате, мы пришли к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 1. Решить уравнение

$$3e^x \operatorname{tg} y\,dx + \left(2-e^x\right)\frac{dy}{\cos^2 y}.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на произведение $\left(2-e^x\right)\operatorname{tg} y$:

$$\left[\begin{array}{l} 3\dfrac{e^x}{e^x-2}dx = \dfrac{dy}{\sin y\cos y}, \\ \operatorname{tg} y = 0, \end{array}\right.$$

откуда, интегрируя, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 3\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-2}dx = \int \frac{dy}{\sin y\cos y}, \\ \operatorname{tg} y = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3\ln\left|e^x-2\right| + C_1 = \ln\left|\operatorname{tg} y\right|, \\ \operatorname{tg} y = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln\left|\dfrac{\operatorname{tg} y}{\left(e^x-2\right)^3}\right| = C_1, \\ \operatorname{tg} y = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{tg} y}{\left(e^x-2\right)^3} = \pm e^{C_1}, \\ \operatorname{tg} y = 0, \end{array}\right.$$

$$\frac{\operatorname{tg} y}{\left(e^x-2\right)^3} = C,$$

или, окончательно,

$$\operatorname{tg} y = C\left(e^x-2\right)^3.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$xy' + y = y^2.$$

Решение.

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - y,$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y^2 - y} = \dfrac{dx}{x}, \\ y^2 - y = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dx}{x}, \\ y = 0, \\ y = 1, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln\left|\dfrac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + \tilde{C}, \\ y = 0, \\ y = 1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{y-1}{y} = \pm e^{\tilde{C}} x, \\ y = 0, \\ y = 1, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{y-1}{y} = Cx, \\ y = 0, \\ y = 1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y(1 - Cx) = 1, \\ y = 0, \\ y = 1, \end{array}\right.$$

и, окончательно,

$$\left[\begin{array}{l} y(1 - Cx) = 1, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$2x^2 yy' + y^2 = 2.$$

Решение.

$$2x^2y\frac{dy}{dx}=2-y^2,$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{2y}{2-y^2}dy=\dfrac{dx}{x^2},\\ 2-y^2=0,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\int\dfrac{2y}{2-y^2}dy=\int\dfrac{dx}{x^2},\\ y^2=2,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}-\ln\left|y^2-2\right|=-\dfrac{1}{x}+\tilde{C},\\ y=\pm\sqrt{2},\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\ln\left|y^2-2\right|=\dfrac{1}{x}-\tilde{C},\\ y=\pm\sqrt{2},\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}y^2-2=\pm e^{-\tilde{C}}e^{\frac{1}{x}},\\ y=\pm\sqrt{2},\end{array}\right.$$

и, окончательно,

$$y^2-2=Ce^{\frac{1}{x}}.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$x^2y^2y'+1=y.$$

Решение.

$$x^2y^2\frac{dy}{dx}=y-1,$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{y-1}dy=\dfrac{dx}{x^2},\\ y-1=0,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\int\dfrac{y^2}{y-1}dy=\int\dfrac{dx}{x^2},\\ y-1=0,\end{array}\right.$$

и, окончательно,

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{2}+y+\ln\left|y-1\right|=-\dfrac{1}{x}+C,\\ y=1.\end{array}\right.$$

§ 3. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной функцией n-й степени***, если имеет место тождество

$$f(tx,\ ty)=t^n f(x,\ y).$$

Например, функция

$$f(x,\ y)=x^2+y^2-xy$$

является однородной функцией второй степени, так как

$$f(tx,\ ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)=t^2\left(x^2+y^2-xy\right)=t^2 f(x,\ y).$$

При $n=0$ имеем однородную функцию нулевой степени, например, функция

$$f(x,\ y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

есть однородная функция нулевой степени, поскольку

$$f(tx,\ ty)=\frac{(tx)^2-(ty)^2}{(tx)^2+(ty)^2}=\frac{t^2\left(x^2-y^2\right)}{t^2\left(x^2+y^2\right)}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=f(x,\ y).$$

Однородным дифференциальным уравнением называется дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y), \tag{5}$$

где f — непрерывная однородная функция нулевой степени. Заметим, что при этом

$$f(x,\ y)=f\left(x\cdot 1,\ x\cdot\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

так что однородное дифференциальное уравнение (5) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6}$$

Оказывается, с помощью замены переменной это дифференциальное уравнение можно свести к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, рассмотренному выше.

Действительно, будем искать решение дифференциального уравнения (6) в виде

$$y(x) = u(x)x.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\big(u(x)x\big) = u + x\frac{du}{dx}.$$

Подставим y и $\dfrac{dy}{dx}$ в уравнение (6):

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

т. е. в предположении, что $\varphi(u) \neq u$, имеем

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

и мы пришли к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если функция* $\varphi(u)$ *непрерывна при* $u \in (a,b)$ *и*

$$\varphi(u) \neq u$$

на интервале (a, b), *то через любую точку* (x_0, y_0) *угла*

$$a < \frac{y}{x} < b$$

проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{7}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — постоянные числа. Такое дифференциальное уравнение может быть преобразовано к однородному дифференциальному уравнению с помощью переноса начала координат в точку (x_0, y_0) пересечения прямых

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

т. е. осуществив следующую замену переменных:

$$\begin{cases} x = \xi + x_0, \\ y = \eta + y_0. \end{cases}$$

Заметим, что этот метод может быть применен лишь в случае, если эти прямые непараллельны, т. е. если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В противном случае, т. е. если

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda,$$

дифференциальное уравнение (7) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y).$$

Уравнения такого вида были нами рассмотрены выше.

Пример 1. Решить уравнение

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

и в полученном однородном уравнении положим

$$y = ux.$$

Тогда

$$y' = xu' + u$$

и при подстановке в уравнение получаем

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2}.$$

Разделяя переменные, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{dx}{x}, \\ 1-u^2 = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{x}, \\ u^2 = 1, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \arcsin u = \ln|x| + C_1, \\ u = \pm 1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \arcsin \dfrac{y}{x} = \ln Cx, \\ \dfrac{y}{x} = \pm 1, \end{array}\right.$$

и окончательно имеем

$$\left[\begin{array}{l} y = x\sin(\ln Cx), \\ y = \pm x. \end{array}\right.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}.$$

Решение. Положим

$$y = tx,$$

откуда

$$y' = t'x + t.$$

Заметим, что по условию задачи

$$t > -1.$$

Тогда уравнение примет вид

$$x(t'x+t)-tx=(x+tx)\ln\frac{x+tx}{x},$$

$$xt'=(1+t)\ln(1+t),$$

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{(1+t)\ln(1+t)}=\dfrac{dx}{x},\\ 1+t=1,\end{cases}\quad \begin{cases}\displaystyle\int\frac{dt}{(1+t)\ln(1+t)}=\int\frac{dx}{x},\\ t=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\ln\left|\ln(1+t)\right|=\ln|x|+\tilde{C},\\ t=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\ln(1+t)=\pm e^{\tilde{C}}x,\\ t=0,\end{cases}$$

$$\ln(1+t)=Cx,$$

и, окончательно, имеем,

$$\ln\frac{x+y}{x}=Cx.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$xy'=y\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right).$$

Решение. Положим

$$y=tx,$$

откуда

$$y'=t'x+t.$$

Заметим, что по условию задачи

$$t > 0.$$

Тогда уравнение примет вид

$$x\left(t'x+t\right)=tx\cos\left(\ln\frac{tx}{x}\right),$$

$$t'x+t=t\cos\left(\ln t\right),$$

$$x\frac{dt}{dx}=t\left(\cos\left(\ln t\right)-1\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{dt}{t\left(\cos\left(\ln t\right)-1\right)}=\dfrac{dx}{x},\\ t\left(\cos\left(\ln t\right)-1\right)=0,\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{dt}{t\left(\cos\left(\ln t\right)-1\right)}=\int\frac{dx}{x},\\ \cos\left(\ln t\right)=1.\end{array}\right.$$

Заметим, что

$$\int\frac{dt}{t\left(\cos\left(\ln t\right)-1\right)}=\left|\begin{array}{l}v=\ln t\\ dv=\dfrac{dt}{t}\end{array}\right|=\int\frac{dv}{\cos v-1}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}z=\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}\\ dv=\dfrac{2dz}{1+z^2}\\ \cos v=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\end{array}\right|=\int\frac{2dz}{\left(1+z^2\right)\left(\dfrac{1-z^2}{1+z^2}-1\right)}=-\int\frac{dz}{z^2}=$$

$$=\frac{1}{z}+C=\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}}+C=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\ln t\right)}+C.$$

Тогда имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\ln t\right)} = \ln|x| + \tilde{C}, \\ \cos(\ln t) = 1. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\ln t\right) = \ln Cx, \\ \cos(\ln t) = 1. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\ln t\right) = \ln Cx, \\ \ln t = 2\pi k, \quad k \in Z, \end{array}\right.$$

и, окончательно,

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\ln \dfrac{y}{x}\right) = \ln Cx, \\ y = xe^{2\pi k}, \quad k \in Z. \end{array}\right.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\left(x^2 + y^2\right)y' = 2xy.$$

Решение. Положим

$$y = tx,$$

откуда

$$y' = t'x + t.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\left(x^2 + t^2x^2\right)\left(t'x + t\right) = 2x^2t,$$

$$t'x + t = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t - t^3}{1+t^2},$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{1+t^2}{t-t^3}dt=\dfrac{dx}{x},\\ t-t^3=0,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{1+t^2}{t-t^3}dt=\int\frac{dx}{x},\\ t=0,\\ t=\pm 1.\end{array}\right.$$

Заметим, что

$$\frac{1+t^2}{t-t^3}=\frac{1}{t}-\frac{2t}{t^2-1},$$

так что

$$\int\frac{1+t^2}{t-t^3}dt=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{2t}{t^2-1}dt=\ln|t|-\ln\left|t^2-1\right|+C=\ln\left|\frac{t}{t^2-1}\right|+C,$$

поэтому

$$\left[\begin{array}{l}\ln\left|\dfrac{t}{t^2-1}\right|=\ln|x|+\tilde{C},\\ t=0,\\ t=\pm 1,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\ln\left|\dfrac{t}{t^2-1}\right|=\ln\left|\dfrac{x}{C}\right|,\\ t=0,\\ t=\pm 1,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{t}{t^2-1}=\dfrac{x}{C},\\ t=0,\\ t=\pm 1,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{\dfrac{y}{x}}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}=\dfrac{x}{C},\\ \dfrac{y}{x}=0,\\ \dfrac{y}{x}=\pm 1,\end{array}\right.$$

и, окончательно,

$$\left[\begin{array}{l}y^2-x^2=Cy,\\ y=0.\end{array}\right.$$

§ 4. Уравнения в полных дифференциалах

Решения далеко не всех дифференциальных уравнений могут быть найдены с помощью конечного числа аналитических преобразований. Дифференциальные уравнения, решения которых могут быть найдены таким образом, называются ***элементарными***. Среди элементарных дифференциальных уравнений первого порядка одним из важнейших является уравнение в полных дифференциалах.

Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в некотором прямоугольнике

$$\{a < x < b, \quad c < y < d\},$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если левая его часть является дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$:

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

то есть

$$F'_x = P(x, y) \text{ и } F'_y = Q(x, y). \tag{8}$$

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные P'_y и Q'_x. Тогда левая часть рассматриваемого дифференциального уравнения является дифференциалом некоторой функции тогда и только тогда, когда

$$P'_y = Q'_x. \tag{9}$$

Действительно, пусть такая функция $F(x, y)$ существует. Тогда, как известно, смешанные производные F''_{xy} и F''_{yx} должны совпадать. Подсчитывая их, согласно соотношениям (8), получаем равенство (9). С другой стороны, условие (9) является достаточным для существования функции $F(x, y)$ — ее существование будет установлено в ходе доказательства следующей теоремы.

Теорема. *Пусть в прямоугольнике* $G=\{a<x<b,\quad c<y<d\}$ *функции* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными* P'_y *и* Q'_x, *причем всюду в прямоугольнике* G *выполняется равенство*

$$P'_y=Q'_x$$

и $Q(x, y)$ *не обращается в нуль. Тогда через каждую точку* $(x_0, y_0)\in G$ *проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения*

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0.$$

Доказательство. Из соотношения

$$dF(x, y)=0$$

имеем

$$F(x, y)=C.$$

Найдем функцию $F(x,y)$, для чего проинтегрируем $P(x, y)=F'_x$ по переменной x:

$$F(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\varphi(y). \tag{10}$$

Продифференцируем это выражение по y и воспользуемся равенством (9):

$$F'_y=\int_{x_0}^{x} P'_y(x, y)dx+\varphi'(y)=\int_{x_0}^{x} Q'_x(x, y)dx+\varphi'(y)=$$

$$=Q(x, y)-Q(x_0, y)+\varphi'(y).$$

Но

$$F'_y=Q(x, y),$$

следовательно,

$$Q(x, y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y),$$

откуда

$$\varphi'(y) = Q(x_0, y).$$

Интегрируя это равенство по y, находим функцию $\varphi(y)$ как

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy.$$

Подставляя найденную функцию в соотношение (10), получаем, что

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy.$$

Таким образом, общее решение уравнения в полных дифференциалах имеет вид

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = C,$$

а частное решение, проходящее через точку (x_0, y_0), получается при $C = 0$, т. е. определяется из соотношения

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = 0.$$

Для завершения доказательства заметим, что поскольку по условию

$$F'_y(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) \neq 0,$$

то, по теореме о неявной функции, соотношение $F(x, y) = 0$ определяет искомое решение $y = y(x)$. **Теорема доказана.**

Если левая часть дифференциального уравнения

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (11)$$

не является полным дифференциалом какой-либо функции, иногда можно подобрать так называемый ***интегрирующий множитель*** $\mu = \mu(x, y)$, который обращает дифференциальное уравнение (11) в уравнение в полных дифференциалах:

$$\mu P(x, y)\,dx + \mu Q(x, y)\,dy = 0,$$

для которого имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu P(x, y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\mu Q(x, y)\big).$$

Преобразовав последнее соотношение, получаем дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять интегрирующий множитель:

$$Q\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - P\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Заметим, что отыскание интегрирующего множителя не всегда практически выполнимо. Рассмотрим некоторые случаи простого определения интегрирующего множителя.

1. Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одной степени. Тогда

$$\mu = \frac{1}{P(x, y)x + Q(x, y)y},$$

если только

$$P(x, y)x + Q(x, y)y \neq 0.$$

При этом уравнением

$$P(x, y)x + Q(x, y)y = 0$$

определяются все кривые, подозрительные на особое решение.

2. Если

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x, y)} = \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ зависит только от переменной x, то

$$\mu = e^{\int \varphi(x)dx}.$$

3. Если

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P(x, y)} = \psi(y),$$

где функция $\psi(y)$ зависит только от переменной x, то

$$\mu = e^{\int \psi(y)dy}.$$

4. Если

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q(x, y)\varphi(x) - P(x, y)\psi(y),$$

то

$$\mu = e^{\int \varphi(x)dx + \int \psi(y)dy}.$$

Справедливость этих утверждений проверьте самостоятельно.

Пример 1. Решить уравнение

$$(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2 \cos xy\, dy = 0.$$

Решение. Имеем:

$$P(x, y) = \sin xy + xy\cos xy,$$

$$Q(x, y) = x^2 \cos xy,$$

так что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy,$$

т. е. данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Следовательно,

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} (\sin xy + xy\cos xy)\,dx + \int_{y_0}^{y} x_0^{\,2} \cos x_0 y\,dy =$$

$$= x\sin xy\Big|_{x_0}^{x} + x_0 \sin x_0 y\Big|_{y_0}^{y} = x\sin xy - x_0 \sin x_0 y_0,$$

так что

$$x\sin xy = x_0 \sin x_0 y_0 + C_1$$

или

$$x\sin xy = C.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\left(1 + y^2 \sin 2x\right)dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{\partial\left(1 + y^2 \sin 2x\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(-2y\cos^2 x\right)}{\partial x} = 2y\sin 2x,$$

то это уравнение в полных дифференциалах.

Из системы

$$\begin{cases} F'_x = 1 + y^2 \sin 2x, \\ F'_y = -2y\cos^2 x, \end{cases}$$

находим

$$F = \int \left(-2y\cos^2 x\right)dy + \varphi(x) = -y^2 \cos^2 x + \varphi(x).$$

Тогда

$$F'_x = \left(-y^2 \cos^2 x + \varphi(x)\right)'_x = y^2 \sin 2x + \varphi'(x) = 1 + y^2 \sin 2x,$$

$$\varphi'(x)=1,\ \ \varphi(x)=x+C.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$x-y^2\cos^2 x=C.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{\partial\left(3x^2(1+\ln y)\right)}{\partial y}=-\frac{\partial\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)}{\partial x}=3\frac{x^2}{y},$$

то это уравнение в полных дифференциалах.

Из системы

$$\begin{cases} F'_x=3x^2(1+\ln y), \\ F'_y=-2y+\dfrac{x^3}{y}, \end{cases}$$

находим

$$F=\int\left(3x^2(1+\ln y)\right)dx+\varphi(y)=x^3(1+\ln y)+\varphi(y).$$

Тогда

$$F'_y=\left(x^3(1+\ln y)+\varphi(y)\right)'_y=x^3\frac{1}{y}+\varphi'(y)=-2y+\frac{x^3}{y},$$

$$\varphi'(y)=-2y,\ \ \varphi(y)=-y^2+C.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$x^3(1+\ln y)-y^2=C.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{\partial\left(2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(-\sqrt{x^2-y}\right)}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},$$

то это уравнение в полных дифференциалах.

Из системы

$$\begin{cases} F'_x=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right), \\ F'_y=-\sqrt{x^2-y}, \end{cases}$$

находим

$$F=\int 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx+\varphi(y)=\left|\begin{array}{l} t=x^2-y \\ dt=2x\,dx \end{array}\right|=$$

$$=x^2+\int\sqrt{t}\,dt+\varphi(y)=x^2+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\varphi(y)=x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}+\varphi(y).$$

Тогда

$$F'_y=\left(x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}+\varphi(y)\right)'_y=-\sqrt{x^2-y}+\varphi'(y)=-\sqrt{x^2-y},$$

$$\varphi'(y)=0,\ \varphi(y)=C.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}=C.$$

§ 5. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ предполагаются непрерывными функциями на некотором интервале (a, b).

Заметим, что это уравнение линейно относительно y и y'.

Теорема. *Через каждую точку (x_0, y_0) полосы $a < x < b$ проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения*

$$y' = p(x)y + q(x).$$

Доказательство. Решение уравнения состоит из двух этапов.

1. Рассмотрим уравнение, в котором отброшена функция $q(x)$, то есть рассмотрим однородное уравнение, которое соответствует исходному дифференциальному уравнению:

$$y' = p(x)y.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y,$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} = p(x)dx, \\ y = 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \ln|y| = \displaystyle\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx + C, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

$$y = Ce^{\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}.$$

2. Будем искать решение исходного неоднородного дифференциального уравнения в виде

$$y = C(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$$

Подставим это выражение в исходное дифференциальное уравнение:

$$C'(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx} + C(x)p(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx} = p(x)C(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx} + q(x),$$

$$C'(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x) = q(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$$

В результате мы получили простейшее дифференциальное уравнение относительно функции $C(x)$. Как нам известно, его общее решение задается формулой

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} q(x)e^{-\int_{x_0}^{t} p(x)dx} dt + C.$$

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} p(x)dx} dt + C \right) e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}.$$

Для определения частного решения, проходящего через заданную точку (x_0, y_0), положим

$$y(x_0) = y_0$$

и тогда имеем

$$y_0 = \left(\int_{x_0}^{x_0} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(x)\,dx} dt + C \right) e^{\int_{x_0}^{x_0} p(x)\,dx},$$

откуда

$$C = y_0.$$

Итак, окончательно имеем, что искомое решение единственным образом определяется формулой

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{x_0}^{t} p(x)\,dx} dt + y_0 \right) e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Решить уравнение

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Решение. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному дифференциальному уравнению:

$$y' + 2xy = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} = -2x\,dx, \\ y = 0, \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \int \dfrac{dy}{y} = -2\int x\,dx, \\ y = 0, \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln|y| = -x^2 + C_1, \\ y = 0, \end{array} \right.$$

откуда

$$y = Ce^{-x^2}.$$

Будем искать решение исходного дифференциального уравнения в виде

$$y = C(x)e^{-x^2}.$$

При подстановке этой функции в уравнение, имеем:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2},$$

то есть

$$C'(x) = 2x,$$

откуда

$$C(x) = x^2 + C.$$

Итак, общее решение уравнения имеет вид

$$y = \left(x^2 + C\right)e^{-x^2}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y' + y\operatorname{tg}x = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Решим сначала линейное однородное уравнение

$$y' + y\operatorname{tg}x = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} = -\operatorname{tg}x\,dx, \\ y = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \operatorname{tg}x\,dx, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln|y| = \ln|\cos x| + \tilde{C}, \\ y = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = \pm e^{\tilde{C}}\cos x, \\ y = 0, \end{array}\right. \quad y = C\cos x.$$

Положим

$$y = C(x)\cos x$$

и подставим в линейное неоднородное уравнение:

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x},$$

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\quad C(x) = \mathrm{tg}\,x + C,$$

откуда

$$y = (\mathrm{tg}\,x + C)\cos x = \sin x + C\cos x.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$(xy' - 1)\ln x = 2y.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$y' - \frac{2}{x\ln x}y = \frac{1}{x},$$

и решим сначала линейное однородное уравнение

$$y' - \frac{2}{x\ln x}y = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} = 2\dfrac{dx}{x\ln x}, \\ y = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x\ln x}, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln|y| = 2\ln\ln x + \tilde{C}, \\ y = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = \pm e^{\tilde{C}}\ln^2 x, \\ y = 0, \end{array}\right. \quad y = C\ln^2 x.$$

Положим

$$y = C(x)\ln^2 x$$

и подставим в линейное неоднородное уравнение:

$$C'(x)\ln^2 x + C(x)\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x\ln x}C(x)\ln^2 x = \frac{1}{x},$$

$$C'(x) = \frac{1}{x\ln^2 x},\quad C(x) = -\frac{1}{\ln x} + C$$

откуда

$$y = \left(-\frac{1}{\ln x} + C\right)\ln^2 x = -\ln x + C\ln^2 x.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x},$$

и решим сначала линейное однородное уравнение

$$y' + \frac{x+1}{x}y = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{x+1}{x}dx, \\ y = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx, \\ y = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln|y| = -x - \ln|x| + \tilde{C}, \\ y = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = \pm e^{\tilde{C}}\dfrac{e^{-x}}{x}, \\ y = 0, \end{array}\right. \quad y = C\frac{e^{-x}}{x}.$$

Положим

$$y = C(x)\frac{e^{-x}}{x}$$

и подставим в линейное неоднородное уравнение:

$$C'(x)\frac{e^{-x}}{x} - C(x)\frac{x+1}{x^2}e^{-x} - \frac{x+1}{x}C(x)\frac{e^{-x}}{x} = 3xe^{-x},$$

$$C'(x)=3x^2,\ \ C(x)=x^3+C,$$

откуда

$$y=\left(x^3+C\right)\frac{e^{-x}}{x}.$$

§ 6. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется дифференциальное уравнение вида

$$y'=p(x)y+q(x)y^n,$$

где $n\neq 0$ и $n\neq 1$.

Покажем, что уравнение Бернулли может быть сведено к линейному дифференциальному уравнению первого порядка, рассмотренному выше.

Домножим обе части уравнения на y^{-n}, получив

$$y'y^{-n}=p(x)y^{1-n}+q(x),$$

и сделаем замену

$$z=y^{1-n}. \tag{12}$$

Тогда

$$z'=(1-n)y^{-n}y'$$

и при подстановке в уравнение получаем

$$\frac{z'}{1-n}=p(x)z+q(x)$$

или же

$$z'=(1-n)p(x)z+(1-n)q(x).$$

В результате, мы действительно получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции z. Ре-

шив его, мы найдем решение $y = y(x)$ исходного уравнения Бернулли из соотношения (12).

Замечание. При $n > 0$ уравнение Бернулли имеет решение $y = 0$. Это решение будет частным, если $n > 1$, и особым, если $0 < n < 1$ (проверьте самостоятельно!).

Пример 1. Решить уравнение

$$y' - 2xy = 2x^3y^2.$$

Решение. Положим

$$z = y^{-1}.$$

Тогда

$$z' = -y^{-2}y'$$

и при подстановке получаем линейное уравнение

$$z' + 2xz = -2x^3.$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному дифференциальному уравнению:

$$z' + 2xz = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dz}{z} = -2x\,dx, \\ z = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dz}{z} = -2\int x\,dx, \\ z = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln|z| = -x^2 + C_1, \\ z = 0, \end{array}\right.$$

откуда

$$z = Ce^{-x^2}.$$

Будем искать решение неоднородного дифференциального уравнения в виде

$$z = C(x)e^{-x^2}.$$

При подстановке этой функции в уравнение, имеем:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = -2x^3,$$

то есть

$$C'(x) = -2x^3e^{x^2},$$

откуда

$$C(x) = (1 - x^2)e^{x^2} + C.$$

Итак,

$$z = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}.$$

Следовательно, решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y' + 2y = y^2e^x.$$

Решение. В этом уравнении Бернулли сделаем замену

$$y = \frac{1}{z},\ y' = -\frac{z'}{z^2},$$

и уравнение принимает вид

$$-\frac{z'}{z^2}+2\frac{1}{z}=\frac{1}{z^2}e^x,$$

$$z'-2z=-e^x.$$

Решим сначала линейное однородное уравнение

$$z'-2z=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{dz}{z}=2dx,\\ z=0,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\int\dfrac{dz}{z}=2\int dx,\\ z=0,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\ln|z|=2x+\tilde{C},\\ z=0,\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}z=\pm e^{\tilde{C}}e^{2x},\\ z=0,\end{array}\right. \quad z=Ce^{2x}.$$

Положим

$$z=C(x)e^{2x}$$

и подставим в линейное неоднородное уравнение:

$$C'(x)e^{2x}+2C(x)e^{2x}-2C(x)e^{2x}=-e^x,$$

$$C'(x)=-e^{-x},\ C(x)=e^{-x}+C,$$

откуда

$$z=\left(e^{-x}+C\right)e^{2x}=e^x\left(1+Ce^x\right),$$

и окончательно имеем

$$\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{e^x\left(1+Ce^x\right)},\\ y=0.\end{array}\right.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$$

Решение. Переписав уравнение в виде

$$y' - \frac{4}{x}y = 2xy^{\frac{1}{2}},$$

заметим, что это уравнение является уравнением Бернулли. Сделаем замену

$$y = z^2, \quad y' = 2zz',$$

и уравнение принимает вид

$$2zz' - \frac{4}{x}z^2 = 2xz,$$

$$z' - \frac{2}{x}z = x.$$

Решим сначала линейное однородное уравнение

$$z' - \frac{2}{x}z = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dz}{z} = 2\dfrac{dx}{x}, \\ z = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dx}{x}, \\ z = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln|z| = 2\ln|x| + \tilde{C}, \\ z = 0, \end{array}\right. \quad z = Cx^2.$$

Положим

$$z = C(x)x^2$$

и подставим в линейное неоднородное уравнение:

$$C'(x)x^2 + 2xC(x) - \frac{2}{x}C(x)x^2 = x,$$

$$C'(x)=\frac{1}{x},\ C(x)=\ln|x|+\tilde{C}=\ln|Cx|,$$

откуда

$$z=x^2\ln|Cx|,$$

и окончательно имеем

$$\left[\begin{array}{l} y=x^4\ln^2|Cx|, \\ y=0. \end{array}\right.$$

Замечание. Мы рассмотрели основные типы дифференциальных уравнений первого порядка. Иногда дифференциальное уравнение может одновременно принадлежать нескольким типам, например, уравнение

$$y'=\frac{y}{x}$$

является и линейным, и однородным, и с разделяющимися переменными, и уравнением в полных дифференциалах. Для решения таких уравнений следует выбирать простейший вариант (в данном случае дифференциальное уравнение следует решать как уравнение с разделяющимися переменными).

§ 7. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро

Дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной, имеет вид

$$F(x,\ y,\ y')=0.$$

К таким уравнениям часто применим ***метод введения параметра***, который рассмотрим на примере уравнения

$$y=f(x,\ y'). \tag{13}$$

Будем рассматривать производную y' как параметр, полагая

$$y' = p,$$

так что уравнение (13) примет вид

$$y = f(x, p). \tag{14}$$

Продифференцировав уравнение (14) по x и учитывая, что $y' = p$, получим уравнение

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx},$$

разрешимое относительно производной неизвестной функции. Если его общее решение представимо в виде

$$p = \varphi(x, C),$$

то общим решением уравнения (9) будет

$$y = f(x, \varphi(x, C));$$

если же общее решение получится в виде

$$x = \psi(p, C),$$

то общее решение уравнения (13) в параметрической форме запишется следующим образом:

$$\begin{cases} x = \psi(p, C), \\ y = f(\psi(p, C), p). \end{cases}$$

Уравнением Лагранжа называется дифференциальное уравнение вида

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Вводя параметр $p = y'$, получаем:

$$y = \varphi(p)x + \psi(p). \tag{15}$$

Дифференцируя уравнение (15) по x, находим

$$p=\varphi(p)+\left(\varphi'(p)x+\psi'(p)\right)\frac{dp}{dx}.$$

Если $\varphi(p)\neq p$, то полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{dx}{dp}=\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x+\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

относительно переменной $x=x(p)$, имеющем общее решение вида

$$x=\Phi(p,\ C).$$

Тогда общий интеграл уравнения Лагранжа запишется в параметрической форме

$$\begin{cases} x=\Phi(p,\ C), \\ y=\varphi(p)\Phi(p,\ C)+\psi(p). \end{cases} \tag{16}$$

Кроме того, уравнение Лагранжа может иметь другие решения. Действительно, если при некотором $p=p_0$

$$\psi(p_0)=p_0,$$

то из (15) находим решение

$$y=\varphi(p_0)x+\psi(p_0),$$

которое не содержится в общем решении (16). Эти прямые могут оказаться особыми решениями уравнения Лагранжа.

Пример. Решить уравнение

$$y=2xy'-y'^2.$$

Решение. Это — уравнение Лагранжа. Следуя вышеописанному методу, введем параметр $p=y'$:

$$y=2xp-p^2.$$

Дифференцируя полученное уравнение по x, находим

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$$

или

$$p\,dx = 2(x - p)dp,$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dp} = 2\left(\dfrac{x}{p} - 1\right). \\ p = 0. \end{array}\right.$$

Решая дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dp} = 2\left(\frac{x}{p} - 1\right),$$

находим:

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p$$

(проверьте самостоятельно!), откуда

$$y = \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}.$$

Подставляя $p = 0$ в равенство

$$y = 2xp - p^2,$$

получаем частное решение

$$y = 0,$$

которое не содержится в найденном выше семействе решений.

Уравнением Клеро называется дифференциальное уравнение вида

$$y = y'x + \psi(y').$$

Заметим, что уравнение Клеро получается из уравнения Лагранжа при $\varphi(y') = y'$.

Вводя параметр $p = y'$, получаем

$$y = px + \psi(p).$$

Дифференцируя по x, находим:

$$p = p + \left(x + \psi'(p)\right)\frac{dp}{dx},$$

откуда

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \psi'(p)\right) = 0.$$

Равенство будет иметь место, если

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{17}$$

или

$$x + \psi'(p) = 0. \tag{18}$$

Из соотношения (17) имеем

$$p = C,$$

а значит

$$y = Cx + \psi(C).$$

Это семейство прямых есть общее решение уравнения Клеро.

Из соотношения (18) находим решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -\psi'(p)p + \psi(p). \end{cases} \tag{19}$$

Уравнения (19) действительно определяют решение уравнения Клеро, поскольку

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dp}}{\frac{dx}{dp}} = \frac{-\psi'(p) - \psi''(p)p + \psi'(p)}{-\psi''(p)} = p.$$

Заметим, что при этом мы неявно предполагаем, что $\psi''(p) \neq 0$. В противном случае $\psi(y')$ является линейной функцией:

$$\psi(y') = ay' + b$$

и уравнение Клеро становится уравнением с разделяющимися переменными (проверьте самостоятельно!).

Нетрудно видеть, что уравнения (19) представляют огибающую семейства интегральных кривых. Таким образом, интегральные кривые уравнения Клеро состоят из некоторой кривой и всех ее касательных.

Пример 1. Решить уравнение

$$y = xy' + y'^2.$$

Решение. Это — уравнение Клеро. Общее решение имеет вид

$$y = Cx + C^2,$$

а огибающая определяется параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = -2p, \\ y = -p^2. \end{cases}$$

Исключая параметр p, получаем огибающую

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

Пример 2. Найти кривую, отрезок касательной к которой, заключенной между осями координат, имеет постоянную длину a.

Решение. Из уравнения касательной

$$Y - y = y'(X - x),$$

проведенной в точке $M(x, y)$ к искомой кривой (см. рис. 6), несложно найти отрезки OA и OB, отсекаемые ею на осях координат:

$$OA = x - \frac{y}{y'},$$

$$OB = y - x\,y'.$$

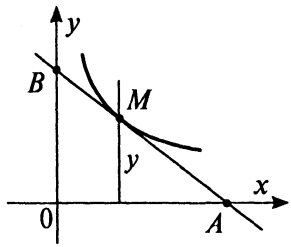

Рис. 6

Так как по условию $AB = a$, то имеем

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2 = a^2$$

или

$$(y - xy')^2\left(\frac{1}{y'^2} + 1\right) = a^2,$$

откуда

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Полученное уравнение есть уравнение Клеро; интегрируя его, находим решение

$$y = xC \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

Ищем огибающую (именно она нас и интересует!); имеем:

$$\begin{cases} x = \mp \dfrac{a}{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \\ y = \pm \dfrac{ap^3}{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Исключая параметр p, получаем

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Эта астроида и есть искомая кривая (см. рис. 7).

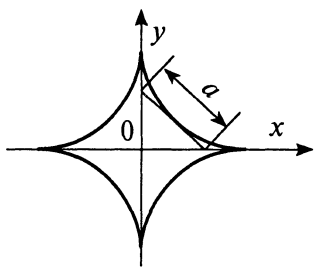

Рис. 7

§ 8. Неполные дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

1. В дифференциальном уравнении

$$F\left(x, y', y''\right) = 0,$$

в которое не входит искомая функция y, можно понизить порядок, если ввести новую переменную следующим образом:

$$y' = p(x). \tag{20}$$

Тогда

$$y'' = p'(x)$$

и уравнение принимает вид

$$F(x, p, p') = 0.$$

Определив из этого уравнения функцию $p = p(x)$, мы находим искомое решение $y = y(x)$, интегрируя соотношение (20):

$$y = \int p(x)\,dx + C.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 y'' = y'^2.$$

Решение.

$$\begin{cases} y' = p(x), \\ x^2 p' = p^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = p(x), \\ x^2 \dfrac{dp}{dx} = p^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = p(y), \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{dp}{p^2} = \dfrac{dx}{x^2}, \\ p = 0, \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = p(y), \\ \left[\begin{array}{l} \int \dfrac{dp}{p^2} = \int \dfrac{dx}{x^2}, \\ p = 0, \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} y' = p(y), \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{p} = -\dfrac{1}{x} + C_1, \\ p = 0, \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} y' = p(y), \\ \left[\begin{array}{l} p = \dfrac{x}{C_1 x + 1}, \\ p = x, \\ p = 0, \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} y' = \dfrac{x}{C_1 x + 1}, \\ y' = x, \\ y' = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} C_1^2 y = C_1 x - \ln|C_1 x + 1| + C_2, \\ y = \dfrac{x^2}{2} + C, \\ y = C, \end{array}\right.$$

поскольку

$$y=\int\frac{x}{C_1x+1}dx=\frac{1}{C_1}\int\frac{C_1x}{C_1x+1}dx=\frac{1}{C_1}\int\frac{(C_1x+1)-1}{C_1x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{C_1}\int\left(1-\frac{1}{C_1x+1}\right)dx=\frac{1}{C_1}\left(x-\int\frac{dx}{C_1x+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{C_1}\left(x-\frac{1}{C_1}\ln|C_1x+1|\right)+C_2.$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$e^{y'}+y'=x.$$

Решение. Это уравнение разрешено относительно x. В таких случаях за параметр обычно принимают y', т.е. полагают

$$y'=\frac{dy}{dx}=t,$$

после чего x легко выражается через t:

$$x=e^t+t.$$

В результате, получаем параметрическое представление уравнения в виде

$$\begin{cases}x=e^t+t,\\ y'=t,\end{cases}$$

причем

$$\frac{dx}{dt}=1+e^t.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=t\left(e^t+1\right),$$

откуда

$$y=\int t\left(e^{t}+1\right)dt=e^{t}\left(t-1\right)+\frac{t^{2}}{2}+C,$$

так что

$$\begin{cases} x=e^{t}+t, \\ y=e^{t}\left(t-1\right)+\dfrac{t^{2}}{2}+C. \end{cases}$$

Пример 3. Решить уравнение

$$x=\frac{k\,y'}{\sqrt{1+y'^{2}}}. \tag{21}$$

Решение. Хотя это уравнение тоже разрешено относительно x, тем не менее с целью упрощения вычисления интеграла при нахождении y удобнее положить

$$y'=\operatorname{tg}t.$$

Тогда параметрическим представлением уравнения (21) будет

$$\begin{cases} x=\pm k\sin t, \\ y'=\operatorname{tg}t, \end{cases}$$

причем

$$x=\begin{cases} k\sin t, & \cos t>0, \\ -k\sin t, & \cos t<0. \end{cases}$$

Далее,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\operatorname{tg}t\left(\pm k\cos t\right)=\pm k\sin t,$$

откуда

$$y=\mp k\cos t+C.$$

В результате имеем:

$$\begin{cases} x=\pm k\sin t, \\ y=\mp k\cos t+C. \end{cases}$$

Исключая параметр t, получим общий интеграл:

$$x^2 + (y - C)^2 = k^2. \tag{22}$$

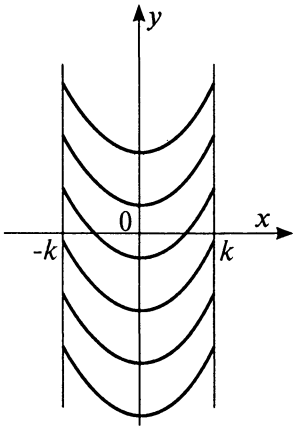

Рис. 8

Заметим, что правая часть уравнения (21) имеет конечные пределы при $y' \to \pm\infty$, а именно:

$$\frac{k\,y'}{\sqrt{1+y'^2}} \xrightarrow[y'\to\pm\infty]{} \pm k,$$

поэтому прямые

$$x = \pm k$$

также будут решениями уравнения (21). Эти решения — особые. Они являются огибающими семейства (22) (см. рис. 8, $k > 0$).

2. Если в дифференциальное уравнение не входит независимая переменная x, т. е. оно имеет вид

$$F(y, y', y'') = 0,$$

то можно понизить порядок, полагая

$$y' = p(y) \tag{23}$$

и считая y новой независимой переменной.

Тогда

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}p(y) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$$

и уравнение принимает вид

$$F(y, p, p'p) = 0.$$

Определив из этого уравнения функцию $p = p(y)$, мы находим искомое решение $y = y(x)$ из уравнения (23) (заметим, что оно является уравнением с разделяющимися переменными).

Пример 1. Решить уравнение

$$y^3 y'' = 1.$$

Решение.

$$\begin{cases} y' = p(y), \\ y^3 pp' = 1, \end{cases} \begin{cases} y' = p(y), \\ y^3 p\dfrac{dp}{dy} = 1, \end{cases} \begin{cases} y' = p(y), \\ p\,dp = \dfrac{dy}{y^3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = p(y), \\ \int p\,dp = \int \dfrac{dy}{y^3}, \end{cases} \begin{cases} y' = p(y), \\ \dfrac{p^2}{2} = -\dfrac{1}{2y^2} + C_1, \end{cases}$$

$$y'^2 = -\frac{1}{y^2} + C_1, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm dx, \quad \int \frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\int dx.$$

Вычислим интеграл:

$$C \pm x = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \left| \begin{array}{c} t^2 = C_1 y^2 - 1 \\ 2t\,dt = 2C_1 y\,dy \end{array} \right| = \frac{1}{C_1}\int \frac{t\,dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{C_1} t + C_2 = \frac{1}{C_1}\sqrt{C_1 y^2 - 1},$$

откуда

$$C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y = y'^2 e^{y'}. \tag{24}$$

Решение. Полагая

$$y' = t,$$

будем иметь:

$$\begin{cases} y = t^2 e^t, \\ y' = t. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} = \left(2t + t^2\right)e^t.$$

Далее находим:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\left(2t + t^2\right)e^t}{t} = \left(2 + t\right)e^t,$$

так что

$$x = \int \left(2 + t\right)e^t\, dt = e^t\left(1 + t\right) + C,$$

поэтому

$$\begin{cases} x = e^t\left(1 + t\right) + C, \\ y = t^2 e^t. \end{cases}$$

Заметим, что функция

$$y = 0$$

является особым решением уравнения (24) (проверьте самостоятельно!).

§ 9. Неполные дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1. Решение дифференциальных уравнений вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

находится n последовательными интегрированиями:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2,$$

.....

$$y = \int dx \int dx \cdots \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_{n-1}x + C_n.$$

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0.$$

Введя новую функцию

$$z = y^{(n-1)},$$

получаем уравнение первого порядка

$$f(z, z') = 0.$$

Найдя его общее решение

$$z = \varphi(x, C),$$

приходим к рассмотренному выше уравнению

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C).$$

3. Дифференциальные уравнения вида

$$f\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

допускают понижение порядка на k единиц, если вести новую функцию

$$z = y^{(k)}.$$

При этом получим дифференциальное уравнение

$$f\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

4. Порядок дифференциальных уравнений вида

$$f\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

может быть понижен на единицу, если принять y за новую независимую переменную, а $p(y) = y'$ за новую функцию.

Тогда преобразованное уравнение будет иметь вид (проверьте самостоятельно!)

$$\varphi\left(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}\right) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$2xy''' = y''$$

и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1) = -1, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 1.$$

Решение. Пусть

$$y'' = z.$$

Имеем

$$2xz' - z = 0,$$

$$2x\frac{dz}{dx} = z,$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dz}{z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{x}, \\ z = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln|z| = \dfrac{1}{2}\ln|x| + \ln C_1, \\ z = 0 \end{array}\right.$$

откуда

$$z = C_1\sqrt{x}.$$

Далее,

$$y'' = z = C_1\sqrt{x},$$

откуда

$$y' = \int C_1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2,$$

и

$$y = \int\left(\frac{2}{3}C_1 x^{\frac{3}{2}} + C_2\right)dx = \frac{4}{15}C_1 x^{\frac{5}{2}} + C_2 x + C_3.$$

Следовательно,

$$y = \frac{4}{15}C_1 x^2\sqrt{x} + C_2 x + C_3$$

— общее решение дифференциального уравнения.

Чтобы найти частное решение, подставим в выражение для y, y' и y'' значение $x = 1$:

$$\begin{cases} y(1) = -1, \\ y'(1) = 0, \\ y''(1) = 1 \end{cases}$$

или же

$$\begin{cases} \frac{4}{15}C_1 + C_2 + C_3 = -1, \\ \frac{2}{3}C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 = 1. \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений находим

$$C_1 = 1,\ C_2 = -\frac{2}{3},\ C_3 = -\frac{3}{5}.$$

Значит, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{4}{15}x^2 - \sqrt{x} - \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}.$$

Математика есть область утонченной красоты. Ее формулы выражают сложные соотношения чисел в определенной форме. Поэтому они могут быть красивы, или, как говорят математики, «изящны».

В.М. Волькенштейн

Глава 3
Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка и их системы

Существование и единственность решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Формула Остроградского—Лиувилля. Системы дифференциальных уравнений. Первые интегралы. Симметрическая форма системы дифференциальных уравнений. Существование и единственность решения системы однородных линейных дифференциальных уравнений.

§ 1. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (1)$$

называется ***линейным дифференциальным уравнением***.

В частности, если $f(x)\equiv 0$, то уравнение

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \qquad (2)$$

называется ***линейным однородным***, а в противном случае — ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением***. Говорят, что однородное уравнение (2) ***соответствует*** неоднородному уравнению (1).

Если в линейном дифференциальном уравнении все коэффициенты $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ постоянные, то такое уравнение называется ***линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами***.

Теорема. *Если функции $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ непрерывны на некотором интервале (a, b), то для любого набора чисел (начальных условий)*

$$\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right),$$

где $a < x_0 < b$, существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (1) (и (2)), удовлетворяющее заданным начальным условиям, то есть такое, что

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0'', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Доказательство. Доказательство основано на общей теореме существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

разрешенного относительно старшей производной. В этой теореме утверждается, что решение задачи Коши для данного уравнения существует и единственно в области непрерывности функций

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}.$$

Поскольку функции $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ непрерывны на некотором интервале (a, b), то все условия этой теоремы для уравнения (1) выполнены. Действительно, уравнение (1) можно переписать в виде

$$y^{(n)} = f(x) - a_1(x)y^{(n-1)} - \cdots - a_{n-1}(x)y' - a_n(x)y,$$

то есть

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = f(x) - a_1(x)y^{(n-1)} - \cdots - a_{n-1}(x)y' - a_n(x)y.$$

Теперь остается заметить, что функции

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -a_n(x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = -a_{n-1}(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = -a_1(x)$$

непрерывны на интервале (a, b) по условию теоремы. **Теорема доказана.**

Следствие 1. *Линейное дифференциальное уравнение не имеет особых решений.*

Следствие 2. *Однородное линейное уравнение всегда имеет тождественно нулевое решение*

$$y = 0,$$

которое удовлетворяет ***нулевым начальным условиям****:*

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

для любого $x_0 \in (a, b)$, *причем других решений, удовлетворяющих этим начальным условиям, не существует.*

Теорема. *Если* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *— два частных решения уравнения*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (3)$$

то любая их линейная комбинация $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ *также является решением этого уравнения.*

Доказательство. Подставим функцию $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ в дифференциальное уравнение (3) и перегруппируем слагаемые:

$$(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{(n)} + a_1(x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) +$$
$$+ a_n(x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1\left(y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y_1\right) +$$
$$+ \alpha_2\left(y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y_1\right) = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *— n частных решений дифференциального уравнения (3), то любая их линейная комбинация*

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

является решением этого уравнения.

Возникает вопрос: будет ли функция $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n$ общим решением уравнения?

Оказывается, этот вопрос решается в зависимости от того, являются ли функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимыми в каком-то интервале.

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются ***линейно зависимыми*** в интервале (a, b), если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ одновременно не равные нулю, и такие что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in (a, b).$$

Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются ***линейно независимыми*** в интервале (a, b), указанная линейная комбинация тождественно обращается в нуль только в том случае, когда все постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю.

Из определения следует, что функции линейно зависимы тогда и только тогда, когда одна из них является линейной комбинацией остальных (проверьте самостоятельно!).

Примеры

1. Функции 1, $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ линейно зависимы на любом интервале, поскольку

$$1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x - 1 \cdot 1 \equiv 0.$$

2. Если одна из функций равна нулю, то весь набор функций линейно зависим.

Действительно, пусть $y_1 = 0$. Тогда

$$1 \cdot y_1(x) + 0 \cdot y_2(x) + \cdots + 0 \cdot y_n(x) \equiv 0.$$

3. Функции 1, x, x^2, $\ldots$, x^n линейно независимы на любом интервале (a, b) (проверьте самостоятельно!).

Определителем Вронского для функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется определитель

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Теорема. *Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы в интервале (a, b), то определитель Вронского тождественно равен нулю в этом интервале:*

$$W(x)\equiv 0.$$

Доказательство. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы. Тогда одна из них, например, $y_1(x)$ есть линейная комбинация остальных:

$$y_1(x)\equiv C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x).$$

Будем дифференцировать это тождество:

$$y_1'(x)\equiv C_2y_2'(x)+\cdots+C_ny_n'(x),$$

$$y_1''(x)\equiv C_2y_2''(x)+\cdots+C_ny_n''(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_1^{(n-1)}(x)\equiv C_2y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_ny_n^{(n-1)}(x).$$

В результате, мы получили, что первый столбец определителя Вронского линейно выражается через остальные. Следовательно, определитель равен нулю. **Теорема доказана.**

Заметим, что обратное утверждение неверно.

Теорема. *Если функции* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ *являются решениями дифференциального уравнения (3) и при этом линейно независимы в интервале* (a, b), *то определитель Вронского, составленный для них, не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала.*

Доказательство. Предположим противное: $W(x_0)=0$ в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$.

Составим линейную систему уравнений относительно неизвестных C_1, ..., C_n, для которой $W(x_0)$ является определителем:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0)+\cdots+C_n y_n(x_0)=0, \\ C_1 y_1'(x_0)+\cdots+C_n y_n'(x_0)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\cdots+C_n y_n^{(n-1)}(x_0)=0. \end{cases}$$

Поскольку у этой системы определитель отличен от нуля, то она имеет ненулевое решение

$$(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n).$$

Рассмотрим функцию

$$y(x)=\tilde{C}_1 y_1(x)+\tilde{C}_2 y_2(x)+\cdots+\tilde{C}_n y_n(x),$$

которая является решением уравнения (3) как линейная комбинация его решений.

Как следует из первой строки системы,

$$y(x_0)=0.$$

Продифференцируем функцию $y(x)$:

$$y'(x)=\tilde{C}_1 y_1'(x)+\tilde{C}_2 y_2'(x)+\cdots+\tilde{C}_n y_n'(x)$$

и заметим, что из второй строки системы вытекает, что

$$y'(x_0)=0,$$

и так далее:

$$y''(x_0)=0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Таким образом, найденное решение $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям

$$(x_0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Однако тождественно нулевая функция $y(x)\equiv 0$, очевидно являющаяся решением рассматриваемого уравнения, также удовлетворяет этим условиям. Поэтому, в силу единственности, оба эти решения совпадают:

$$\tilde{C}_1 y_1(x)+\tilde{C}_2 y_2(x)+\cdots+\tilde{C}_n y_n(x)\equiv 0.$$

Таким образом, оказалось, что линейная комбинация решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ с ненулевыми коэффициентами тождественно равна нулю, следовательно, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависимы. Мы пришли к противоречию, значит наше предположение неверно: $W(x)\neq 0$ для любого $x\in(a,\ b)$. **Теорема доказана.**

Итак, мы имеем следующий способ проверки решений уравнения (3) на линейную независимость. Составим для них определитель Вронского: либо он тождественно равен нулю (и решения линейно зависимы), либо он нигде не обращается в нуль (и решения линейно независимы).

Любая система n линейно независимых решений дифференциального уравнения (3) называется ***фундаментальной системой решений*** этого уравнения.

Теорема. *Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — фундаментальная система решений дифференциального уравнения (3), то функция*

$$y(x)=C_1 y_1(x)+C_2 y_2(x)+\cdots+C_n y_n(x)$$

с произвольными константами C_1, C_2, ..., C_n есть общее решение этого уравнения.

Доказательство. Заметим, что при любых постоянных C_1, C_2, ..., C_n указанная функция является решением уравнения (3) как линейная комбинация его решений.

Покажем, что для любых начальных условий $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ найдется набор коэффициентов $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$ такой, что решение

$$\overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x) + \cdots + \overline{C}_n y_n(x)$$

удовлетворяет заданным начальным условиям, т. е. системе

$$\begin{cases} \overline{C}_1 y_1(x_0) + \overline{C}_2 y_2(x_0) + \cdots + \overline{C}_n y_n(x_0) = y_0, \\ \overline{C}_1 y_1'(x_0) + \overline{C}_2 y_2'(x_0) + \cdots + \overline{C}_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{C}_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \overline{C}_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \overline{C}_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \end{cases}$$

Определитель этой системы линейных уравнений

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

в силу линейной независимости решений $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Следовательно, система имеет единственное решение — набор чисел $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$ такой, что функция $\overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x) + \cdots + \overline{C}_n y_n(x)$ является искомым решением, удовлетворяющим заданным начальным условиям. **Теорема доказана.**

Таким образом, для нахождения общего решения дифференциального уравнения (3) нужно найти n его линейно независимых частных решений и взять их линейную комбинацию.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (4)$$

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система его решений. Заметим, что дифференциальное уравнение, для которого функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ служат фундаментальной системой решений, имеет вид

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y' \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y'' \end{vmatrix} = 0$$

(проверьте самостоятельно!). Раскрывая этот определитель по элементам последнего столбца, получаем:

$$W(x)y'' - W_1(x)y' + W_2(x)y = 0$$

или

$$y'' - \frac{W_1(x)}{W(x)}y' + \frac{W_2(x)}{W(x)}y = 0. \qquad (5)$$

При этом

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$W_1(x) = W'(x).$$

Приравнивая коэффициенты при y' в уравнениях (4) и (5), получаем:

$$p(x) = -\frac{W_1(x)}{W(x)}.$$

Интегрируя это соотношение, находим:

$$\ln W(x)\Big|_{x_0}^{x} = -\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx,$$

откуда

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}.$$

Полученная формула называется ***формулой Остроградского-Лиувилля***. Она получена нами для дифференциального уравнения второго порядка, однако, она верна и в общем случае. Из нее непосредственно вытекает, что определитель $W(x)$ либо тождественно равен нулю, либо не обращается в нуль ни в одной точке.

Теперь займемся выяснением следующего вопроса: как устроено общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x). \qquad (6)$$

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (6) есть сумма некоторого его частного решения и общего решения линейного однородного дифференциального уравнения*

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0, \qquad (7)$$

соответствующего неоднородному уравнению (6).

Доказательство. Пусть $y(x)$ — частное решение уравнения (6). Возьмем произвольное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (6) и покажем, что оно может быть представлено в виде суммы решения $y(x)$ и общего решения $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$ уравнения (7) при некотором наборе констант C_1, C_2, ..., C_n:

$$\tilde{y}(x)=y(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x).$$

Составим разность $\tilde{y}(x)-y(x)$. Это выражение является решением уравнения (7), поскольку

$$(\tilde{y}-y)^{(n)}+a_1(x)(\tilde{y}-y)^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)(\tilde{y}-y)+$$

$$+a_n(x)(\tilde{y}-y)=\tilde{y}^{(n)}+a_1(x)\tilde{y}^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)\tilde{y}-$$

$$-\left(y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y\right)=f(x)-f(x)=0.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x)-y(x)$ может быть представлено в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ уравнения (13) с некоторыми коэффициентами $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, ..., $\tilde{C}_n$:

$$\tilde{y}(x)-y(x)=\tilde{C}_1y_1(x)+\tilde{C}_2y_2(x)+\cdots+\tilde{C}_ny_n(x),$$

откуда

$$\tilde{y}(x)=y(x)+\tilde{C}_1y_1(x)+\tilde{C}_2y_2(x)+\cdots+\tilde{C}_ny_n(x).$$

Теорема доказана.

Конкретный способ отыскания частного решения будет нами рассмотрен ниже для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{8}$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$y''+py'+qy=0. \tag{9}$$

Займемся сначала однородным уравнением (9) и поищем его решение в виде

$$y=e^{\lambda x}.$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)=0.$$

Уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

называется ***характеристическим уравнением*** для уравнения (9).

Возможны следующие случаи.

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — два различных действительных корня.

В этом случае имеем два частных решения: $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$. Эти решения линейно независимы, поскольку

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Следовательно, имеем общее решение

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ — совпадающие действительные корни.

В этом случае имеем одно частное решение: $e^{\lambda x}$. Поскольку корни совпадают, то

$$q = \frac{p^2}{4}$$

и $\lambda = -\frac{p}{2}$, т. е. частное решение имеет вид

$$e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Оказывается, что другим частным решением будет служить функция

$$y = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

Действительно,

$$y' = -\frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x} + e^{-\frac{p}{2}x},$$

$$y'' = \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x} - pe^{-\frac{p}{2}x}$$

и при подстановке получаем:

$$y''+py'+q=\frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}-pe^{-\frac{p}{2}x}+p\left(-\frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}+e^{-\frac{p}{2}x}\right)+qxe^{-\frac{p}{2}x}=$$

$$=\frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}-pe^{-\frac{p}{2}x}-\frac{p^2}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}+pe^{-\frac{p}{2}x}+qxe^{-\frac{p}{2}x}=-\frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}+qxe^{-\frac{p}{2}x}=$$

$$=-\frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}+\frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}=0.$$

Проверим линейную независимость найденных решений:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{-\frac{p}{2}x} & xe^{-\frac{p}{2}x} \\ -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} & e^{-\frac{p}{2}x}-\frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x} \end{vmatrix}=e^{-px}\begin{vmatrix} 1 & x \\ -\frac{p}{2} & 1-\frac{p}{2}x \end{vmatrix}=$$

$$=e^{-px}\left(1-\frac{p}{2}x+\frac{p}{2}x\right)=e^{-px}\neq 0.$$

Итак, имеем общее решение:

$$y=e^{-\frac{p}{2}x}\left(C_1+C_2x\right).$$

3. $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ — пара комплексно-сопряженных корней. Тогда имеем два частных решения

$$y_1(x)=e^{\alpha+i\beta} \text{ и } y_2(x)=e^{\alpha-i\beta}.$$

Воспользуемся формулой

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Тогда имеем:

$$y_1(x)=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right),$$

а

$$y_2(x)=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{-i\beta x}=$$

$$=e^{\alpha x}\left(\cos(-\beta x)+i\sin(-\beta x)\right)=e^{\alpha x}\left(\cos\beta x-i\sin\beta x\right).$$

Как известно, любая линейная комбинация решений однородного уравнения является его решением, в частности

$$\tilde{y}_1=\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } \tilde{y}_2=\frac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Проверим линейную независимость найденных решений:

$$W(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2)=\begin{vmatrix}\dfrac{y_1+y_2}{2} & \dfrac{y_1-y_2}{2i}\\ \dfrac{y_1'+y_2'}{2} & \dfrac{y_1'-y_2'}{2i}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4i}(y_1+y_2)(y_1'-y_2')-\frac{1}{4i}(y_1-y_2)(y_1'+y_2')=$$

$$=\frac{1}{4i}2(y_2y_1'-y_1y_2')=-\frac{1}{2i}W(y_1,y_2)\neq 0,$$

поскольку функции y_1 и y_2 линейно независимы.

Итак, имеем общее решение

$$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right).$$

§ 3. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Рассмотрим способ отыскания частного решения уравнения (8) — так называемый ***метод вариации произвольных постоянных***, или ***метод Лагранжа.***

Пусть $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ — общее решение уравнения (9). Частное решение уравнения (8) будем искать в виде

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x),$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — некоторые неизвестные функции.

Продифференцируем это выражение:

$$y'(x)=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)+C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)$$

и потребуем, чтобы сумма двух последних слагаемых обращалась в нуль:

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0.$$

Тогда

$$y''(x)=C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)$$

и подставим $y(x)$, $y'(x)$ и $y''(x)$ в уравнение (8):

$$y''+py'+qy=C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+$$

$$+p\left(C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)\right)+q\left(C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)\right)=$$

$$=\left(y_1''(x)+py_1'(x)+qy_1(x)\right)C_1(x)+\left(y_2''(x)+py_2'(x)+qy_2(x)\right)C_2(x)+$$

$$+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Таким образом, мы получили два соотношения для производных от функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0, \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x). \end{cases}$$

Определитель этой алгебраической системы есть определитель Вронского для функций y_1 и y_2. Поскольку эти функции образуют фундаментальную систему решений для уравнения (9), они линейно независимы и, следовательно, определитель системы отличен от нуля. Поэтому система имеет единственное решение

$$C_1'(x)=\varphi(x),$$
$$C_2'(x)=\psi(x).$$

Тогда легко найти сами функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x)=\int\varphi(x)dx,$$

$$C_2(x)=\int\psi(x)dx,$$

и, тем самым, найти искомое частное решение.

Пример. Решить уравнение

$$y''+y=\frac{1}{\sin x}.$$

Решение. Сначала найдем общее решение однородного уравнения,

$$y''+y=0,$$

соответствующего данному дифференциальному уравнению:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

(проверьте самостоятельно!).

Тогда, следуя изложенному выше, имеем следующую систему для неизвестных функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=0, \\ C_1'(x)\cos x-C_2'(x)\sin x=\dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Решая ее, получим:

$$C_1'(x)=\operatorname{ctg}x,$$

откуда

$$C_1(x)=\ln|\sin x|+C_1$$

и

$$C_2'(x)=-1,$$

откуда

$$C_2(x) = -x + C_2.$$

Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \left(\ln|\sin x| + C_1\right)\sin x + \left(C_2 - x\right)\cos x.$$

Замечание. Пусть неоднородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

Если найти частное решение отдельно для уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x)$$

и отдельно для уравнения

$$y'' + py' + qy = f_2(x),$$

то их сумма будет частным решением для исходного дифференциального уравнения (проверьте самостоятельно!).

§ 4. Нормальные системы дифференциальных уравнений

Многие физические задачи могут быть сведены к решению систем дифференциальных уравнений. ***Системой обыкновенных дифференциальных уравнений*** называется система

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \end{cases}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые функции независимой переменной x, а $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — функции, заданные и непрерывные в некоторой области.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется ***нормальной***, если она имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{10}$$

При этом число n называется ***порядком системы***.

Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка называется ***линейной***, если она имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{11}$$

где $f_i(x)$, $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$ — заданные функции независимой переменной x.

Теория линейных систем составляет одну из важнейших частей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Совокупность n функций $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$, определенных и непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b), называется ***решением системы*** (10), если эти функции обращают каждое из уравнений системы в тождество на интервале (a, b).

Кривая $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ в $(n+1)$-мерном пространстве называется ***интегральной кривой***.

Задача нахождения решения $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ системы (10), удовлетворяющего ***начальным условиям***

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_n^{(0)},$$

где $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ — заданные числа, называется ***задачей Коши*** для системы (10). Точка $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ называется ***начальной точкой***.

Имеет место следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы (10).

Теорема. *Пусть функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, *определенны и непрерывны в некоторой области* $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *и пусть в этой области существуют и непрерывные функции*

$$\frac{\partial f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда через каждую точку $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right) \in D$ *проходит единственное решение системы (10).*

Заметим, что для существования решения задачи Коши достаточно потребовать непрерывности функций $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, в окрестности начальной точки. Единственность же гарантируется непрерывностью функций $\dfrac{\partial f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. В тех точках, где это условие не выполнено, единственность может нарушаться.

Совокупность n функций

$$\left[\begin{array}{l} \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_1, \\ \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_n, \end{array}\right. \tag{12}$$

определенных в некоторой области изменения переменных x, C_1, $C_2, \ldots, C_n$, и имеющих частные производные по x, называется ***общим решением*** системы (10) в области D, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши, если выполнены два условия:

1. Совокупность (12) разрешима относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т. е.

$$\left[\begin{array}{l} C_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ C_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{array}\right. \tag{13}$$

2. Совокупность (12) является решением системы (10) при всех значениях произвольных постоянных, доставляемых формулами (13), когда точка $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пробегает область D.

Решение системы (10), в каждой точке которого имеет место существование и единственность решения задачи Коши, называется ***частным решением***. Так, решение, получающееся из общего решения в области D при конкретных (допустимых) числовых значениях произвольных постоянных (включая $\pm\infty$), будет частным решением.

Если в каждой точке решения нарушается единственность решения задачи Коши, то оно называется ***особым***.

Функция $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (которую мы будем предполагать непрерывно дифференцируемой), называется ***интегралом*** системы (10), если она обращается тождественно в постоянную вдоль любого частного решения. Отсюда следует, что

$$d\psi \equiv 0$$

в силу системы (10), т. е.

$$d\psi\big|_{(1)} = \frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy_1}f_1\,dx + \cdots + \frac{d\psi}{dy_n}f_n\,dx \equiv 0.$$

Нормальная система n уравнений не может иметь больше, чем n независимых интегралов. Так что, если $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ — независимые интегралы системы (10), то всякий другой интеграл ψ этой же системы будет функцией от $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Равенство

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C$$

называется ***первым интегралом*** системы (10).

Совокупность n независимых интегралов системы (10) называется ***общим интегралом*** этой системы. Напомним, что функции $\varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, называются ***независимыми***, если якобиан

$$J = \det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\right), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

не равен тождественно нулю.

При интегрировании данной системы стараются (смотря по тому, что удобнее) найти общее решение или общий интеграл.

Если, интегрируя нормальную систему n-го порядка, мы получаем семейство интегральных кривых, зависящее от n произвольных постоянных, в виде, не разрешенном ни относительно произвольных постоянных, ни относительно искомых функций, то это семейство мы также будем называть общим интегралом этой системы.

В общем случае имеются очень ограниченные возможности интегрирования в квадратурах. Для линейных систем эти возможности несколько шире. Решения линейной системы с переменными коэффициентами во многих случаях удается найти при помощи степенных рядов; для интегрирования линейных систем применяется также матричный метод.

Система вида

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{14}$$

называется ***системой дифференциальных уравнений в симметрической форме.***

Если в точке $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ хотя бы одна из функций $F_1, F_2, \ldots, F_n$ отлична от нуля, то в окрестности этой точки систему (14) можно заменить равносильной ей нормальной системой из $n-1$ уравнения. Действительно, пусть, для определенности,

$$F_n\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \neq 0.$$

Тогда система (14) равносильна следующей нормальной системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n} = \dfrac{F_1}{F_n}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_n} = \dfrac{F_2}{F_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} = \dfrac{F_{n-1}}{F_n}. \end{cases} \tag{15}$$

Каждый (первый) интеграл системы (15) будем называть ***(первым) интегралом*** системы (14). Система (14) имеет не более $n-1$ независимых (первых) интегралов. Совокупность $n-1$ независимых первых интегралов системы (14) будем называть ***общим интегралом*** этой системы.

Заметим, что всякую нормальную систему (10) можно записать в симметрической форме:

$$\frac{dy_1}{f_1}=\frac{dy_2}{f_2}=\dots=\frac{dy_n}{f_n}=\frac{dx}{1}.$$

Система дифференциальных уравнений высших порядков, разрешенная относительно старших производных, называется ***канонической системой***. Она имеет вид

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)}=f_1\left(x,\ y,\ y_1',\ \dots,\ y_1^{(m_1-1)},\ \dots,\ y_n,\ y_n',\ \dots,\ y_n^{(m_1-1)}\right), \\ y_2^{(m_2)}=f_2\left(x,\ y,\ y_1',\ \dots,\ y_1^{(m_2-1)},\ \dots,\ y_n,\ y_n',\ \dots,\ y_n^{(m_2-1)}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(m_n)}=f_n\left(x,\ y,\ y_1',\ \dots,\ y_1^{(m_n-1)},\ \dots,\ y_n,\ y_n',\ \dots,\ y_n^{(m_n-1)}\right). \end{cases} \tag{16}$$

Число $m_1+m_2+\dots+m_n$ называется ***порядком*** системы (16).

Совокупность n функций

$$y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\varphi_2(x),\ \dots,\ y_n=\varphi_n(x), \tag{17}$$

имеющих непрерывные производные соответствующих порядков, называется ***решением*** системы (16) в интервале $(a,\ b)$, если эти функции обращают уравнения системы (16) в тождества, справедливые для всех значений x из $(a,\ b)$.

Задача Коши для канонической системы (16) состоит в нахождении решения (17), в котором искомые функции y_1, y_2, ..., y_n вместе со своими производными до порядков соответственно m_1-1, m_2-1, ..., m_n-1 принимают наперед заданные числовые значения при заданном значении x.

Общее решение канонической системы (16) содержит $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ произвольных постоянных.

§ 5. Методы интегрирования систем дифференциальных уравнений

Последовательное интегрирование. Если система дифференциальных уравнений состоит из уравнений первого порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию, так что она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y), \end{cases}$$

то ее интегрирование сводится к интегрированию каждого из уравнений в отдельности.

В случае, когда система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases}$$

ее интегрирование выполняется последовательно: нужно проинтегрировать первое уравнение, подставить найденное общее решение во второе уравнение, проинтегрировать его и т. д.

В частности, таким путем всегда может быть проинтегрирована в квадратурах линейная система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \dots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases}$$

Метод исключения. Многие нормальные системы удается проинтегрировать путем предварительного приведения данной системы n-го порядка к одной неизвестной функции или к нескольким таким уравнениям, причем сумма их порядка равна n. Это приведение системы к одному уравнению n-го порядка (если это возможно) достигается последовательным дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных функций, кроме одной (методом исключения). Проинтегрировав полученное уравнение, находят общее решение данной системы уже без новых квадратур.

Каноническая система дифференциальных уравнений порядка $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ также во многих случаях может быть проинтегрирована методом исключения, ибо она, вообще говоря, приводится к одному уравнению порядка $m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Интегрируемые комбинации. Задача интегрирования данной системы дифференциальных уравнений значительно облегчается, если удается найти один или несколько независимых первых интегралов системы, ибо тогда удается понизить порядок системы.

Первые интегралы во многих случаях находятся путем построения интегрируемых комбинаций, т. е. легко интегрируемых дифференциальных уравнений, полученных из данной системы путем несложных преобразований. Для нахождения интегрируемых комбинаций иногда бывает полезно предварительно переписать данную систему в симметрической форме.

Если для системы, состоящей из n уравнений, найдено n независимых первых интегралов, то тем самым найден общий интеграл этой системы и ее интегрирование окончено.

Пример 1. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z}, \\ z' = \dfrac{1}{y - x}, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(0) = -1, \quad z(0) = 1.$$

Решение. Воспользуемся методом исключения. Дифференцируя второе уравнение системы, имеем:

$$z'' = -\frac{1}{(y-x)^2}(y' - 1).$$

Заменив в полученном уравнении выражения $\dfrac{1}{y-x}$ и $y' - 1$ их значениями из исходной системы, получим

$$z'' = z'^2 \frac{1}{z}.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z'}{z},$$

$$z' = C_1 z,$$

откуда

$$z = C_2 e^{C_1 x}.$$

Для нахождения y воспользуемся вторым из уравнений системы:

$$y - x = \frac{1}{z'},$$

$$y - x = \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x},$$

откуда

$$y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}.$$

Тогда общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}, \\ z = C_2 e^{C_1 x}. \end{cases}$$

Решим теперь поставленную задачу Коши. Подставляя в общее решение вместо x, y и z их начальные значения, имеем:

$$\begin{cases} -1 = \dfrac{1}{C_1 C_2}, \\ 1 = C_2, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = -1, \quad C_2 = 1,$$

так что искомым решением будет

$$\begin{cases} y = x - e^x, \\ z = e^{-x}. \end{cases}$$

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Решение. Найдем общий интеграл системы методом интегрируемых комбинаций и понижения порядка системы. Умножая почленно первое и второе уравнения системы соответственно на x и y и складывая полученные уравнения, получим интегрируемую комбинацию:

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0,$$

откуда находим первый интеграл системы:

$$x^2+y^2=C_1^2.$$

Пользуясь найденным первым интегралом, понизим порядок данной системы. Разрешая полученное соотношение относительно y (и ограничиваясь положительными значениями y), имеем

$$y=\sqrt{C_1^2+x^2}.$$

Подставляя это значение в первое из уравнений системы, получим уравнение первого порядка с одной неизвестной функцией x:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{C_1^2-x^2},$$

интегрируя которое, находим

$$\arcsin\frac{x}{C_1}=t+C_2$$

или

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-t=C_2$$

и мы получили еще один первый интеграл системы. Очевидно, эти первые интегралы независимы, так что их совокупность образует общий интеграл исходной системы.

Пример 3. Найти общий интеграл системы

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}. \qquad (18)$$

Решение. Построим две интегрируемые комбинации, пользуясь свойством ряда равных отношений. Складывая в системе (18) числители и знаменатели дробей, можем написать

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}=\frac{dx+dy+dz}{0}, \tag{19}$$

откуда

$$dx+dy+dz=0$$

или

$$d\left(x+y+z\right)=0,$$

следовательно,

$$x+y+z=C_1. \tag{20}$$

Теперь умножим в системе (19) числители и знаменатели дробей соответственно на $2x$, $2y$ и $2z$ и сложим числители и знаменатели полученных дробей. Получим:

$$\frac{2x\,dx}{2x\left(z-y\right)}=\frac{2y\,dy}{2y\left(x-z\right)}=\frac{2z\,dz}{2z\left(y-x\right)}=\frac{d\left(x^2+y^2+z^2\right)}{0},$$

откуда

$$x^2+y^2+z^2=C_2^2. \tag{21}$$

Первые интегралы (20), (21) и образуют общий интеграл системы (18).

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z}{\left(z-y\right)^2},\\[2ex] \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y}{\left(z-y\right)^2}.\end{cases} \tag{22}$$

Решение. Для нахождения интегрируемых комбинаций целесообразно переписать систему (22) в симметрической форме:

$$\frac{dy}{\dfrac{z}{(z-y)^2}}=\frac{dz}{\dfrac{y}{(z-y)^2}}=\frac{dx}{1}.$$

Умножим все знаменатели на $(z-y)^2$:

$$\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}=\frac{dx}{(z-y)^2}. \qquad (23)$$

Одной из интегрируемых комбинаций, очевидно, будет

$$\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y},$$

откуда

$$y^2-z^2=C_1^2.$$

Для получения второй интегрируемой комбинации вычтем в системе (23) из числителя и знаменателя первой дроби соответственно числитель и знаменатель второй дроби:

$$\frac{d(y-z)}{z-y}=\frac{dx}{(z-y)^2}.$$

Отсюда находим еще один первый интеграл:

$$2x+(y-z)^2=C_2.$$

Тем самым, интегрирование системы (22) закончено.

§ 6. Линейные системы дифференциальных уравнений

1. Однородные системы. Линейные системы можно интегрировать общими методами. Но для них существует и специальная теория интегрирования, основанная на некоторых замечательных свойствах этих систем и их решений.

Линейная система имеет вид:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} P_{kl}(x) y_l + f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{24}$$

Если все функции $f_k(x)$ тождественно равны нулю, то система (24) называется ***однородной***. В противном случае она называется ***неоднородной***.

Будем предполагать, что функции $P_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ определены и непрерывны в некотором интервале (a, b). Тогда система (24) имеет единственное решение

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x),$$

определенное на всем интервале (a, b) и удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)},\ \ y_2(x_0) = y_2^{(0)},\ \ y_n(x_0) = y_n^{(0)} \tag{25}$$

причем числа $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ можно задавать произвольно, а x_0 должно принадлежать интервалу (a, b).

Заметим, что любое решение линейной системы является частным решением, так что особых решений она не имеет.

Рассмотрим однородную систему

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} P_{kl}(x) y_l, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

Система (26) всегда имеет тождественно нулевое решение

$$y_1 \equiv 0,\ \ y_2 \equiv 0,\ \ldots,\ \ y_n \equiv 0,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y_1(x_0)=0,\ \ y_2(x_0)=0,\ \ y_n(x_0)=0,$$

при этом других решений, удовлетворяющих нулевым начальным условиям, нет.

Для построения общего решения однородной системы (26) достаточно знать ***n линейно независимых*** в интервале $(a,\ b)$ частных решений

$$\begin{array}{l} y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\ \ldots,\ y_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1},\ y_{n2},\ \ldots,\ y_{nn}, \end{array} \tag{27}$$

т. е. таких, для которых тождества

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_{ik},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad a<x<b,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – постоянные числа, могут выполняться только при

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2=0,\ \ldots,\ \alpha_n=0.$$

Такая система решений (27) называется ***фундаментальной системой решений***. Чтобы система решений была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Вронского

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \tag{28}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала $(a,\ b)$.

При сделанном предположении относительно непрерывности функций $P_{kl}(x)$ существует бесчисленное множество фундаментальных систем.

Фундаментальная система (28) называется ***нормированной*** в точке $x = x_0$, если решения, составляющие ее, удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\begin{array}{l} y_{11}(x_0) = 1,\ y_{12}(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_{1n}(x_0) = 0, \\ y_{21}(x_0) = 0,\ y_{22}(x_0) = 1,\ \ldots,\ y_{2n}(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}(x_0) = 0,\ y_{n2}(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_{nn}(x_0) = 1. \end{array}$$

Если известна фундаментальная система решений (27), то их линейная комбинация

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{29}$$

где C_i — произвольные постоянные, представляет собой общее решение системы (26) в полосе $a < x < b$, т. е. все решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений (26) содержатся в формуле (29).

2. Неоднородные системы. Чтобы найти общее решение неоднородной системы (24), достаточно знать общее решение (29) соответствующей однородной системы (26) и одно частное решение неоднородной системы (24)

$$y_1 = y_1^{(1)},\ y_2 = y_2^{(1)},\ \ldots,\ y_n = y_n^{(1)}.$$

Сумма этих решений

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{30}$$

дает общее решение неоднородной системы (24), т. е. все решения неоднородной системы (24) содержатся в формуле (30).

Методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа) можно построить общее решение неоднородной системы, исходя из фундаментальной системы решений соответствующей ей однородной системы (26). При этом решение системы (24) ищется в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_{ik}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{31}$$

где $C_i(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции. Эти функции определяются из системы

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_{ik} = f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{32}$$

Решая ее, находим

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

откуда

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx + C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставляя эти значения в формулу (31), получаем

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} y_{ik} \int \varphi_i(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Это и есть общее решение неоднородной системы (24).

Если все коэффициенты и правые части системы (24) определены в интервале (a, b) за исключением отдельных точек, в которых они разрывны, то последние называются ***особыми точками*** системы (24).

Замечание 1. Пусть дана совокупность n линейно независимых в интервале (a, b) систем функций

$$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{33}$$

Рассмотрим однородную линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{vmatrix} y_k' & y_{1k}' & y_{2k}' & \cdots & y_{nk}' \\ y_1 & y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ y_2 & y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{34}$$

Очевидно, что для системы (34) совокупность (33) будет фундаментальной системой решений (проверьте самостоятельно!).

Замечание 2. Если коэффициенты системы (24) (или (26)) таковы, что

$$P_{kl}(x) = a_{kl}\varphi(x), \quad k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то подстановка

$$t = \int \varphi(x)\,dx$$

приводит эту систему к системе с постоянными коэффициентами (проверьте самостоятельно!).

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z + 2e^{-x}, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z + e^{-x}, \end{cases}$$

методом вариации произвольных постоянных.

Решение. Общее решение однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z, \end{cases}$$

соответствующей данной неоднородной системе дифференциальных уравнений, имеет вид

$$\begin{cases} y = C_1 e^{x} + 2C_2 e^{2x}, \\ z = -C_1 e^{x} - 3C_2 e^{2x}, \end{cases}$$

(проверьте самостоятельно!), поэтому частное решение неоднородной системы будем искать в виде

$$\begin{cases} y = C_1(x)e^x + 2C_2(x)e^{2x}, \\ z = -C_1(x)e^x - 3C_2(x)e^{2x}. \end{cases}$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = 2e^{-x}, \\ -C_1'(x)e^x - 3C_2'(x)e^{2x} = e^{-x}, \end{cases}$$

откуда

$$C_1'(x) = 8e^{-2x}, \quad C_2'(x) = -3e^{-3x},$$

поэтому

$$C_1(x) = -4e^{-2x} + C_1,$$

$$C_2(x) = e^{-3x} + C_2.$$

Следовательно, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{cases} y = -2e^{-x} + C_1e^x + 2C_2e^{2x}, \\ z = e^{-x} - C_1e^x - 3C_2e^{2x}. \end{cases}$$

Заметим, что в этом случае можно было бы воспользоваться методом неопределенных коэффициентов, разыскивая частное решение

$$y_1 = -2e^{-x}, \quad z_1 = e^{-x}$$

данной системы в виде

$$y_1 = ae^{-x}, \quad z_1 = be^{-x}.$$

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' - y = 0, \end{cases} \tag{35}$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 0. \tag{36}$$

Решение. Для нахождения общего решения воспользуемся методом исключения. Дифференцируя два раза первое уравнение и заменяя z'' ее значением из второго уравнения, получаем:

$$y^{IV} - y = 0.$$

Это уравнение имеет общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Так как

$$z = y'',$$

то

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

и общим решением системы (35) будет

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \\ z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x. \end{cases}$$

Чтобы выделить из него решение, удовлетворяющее начальным условиям (36), подставим в систему

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \\ y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x, \\ z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x, \\ z' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \sin x - C_4 \cos x, \end{cases}$$

вместо x, y, y', z и z' их начальные значения.

Получим:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + C_3, \\ 1 = C_1 - C_2 + C_4, \\ 1 = C_1 + C_2 - C_3, \\ 0 = C_1 - C_2 - C_4, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = \frac{3}{4},\ C_2 = \frac{1}{4},\ C_3 = 0,\ C_4 = \frac{1}{2},$$

так что искомым решением будет

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x, \\ z = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x. \end{cases}$$

Других решений, удовлетворяющих начальным условиям (36), нет.

В математике есть своя красота,
как в живописи и поэзии.

Н.Е. Жуковский

Глава 4
Элементы операционного исчисления

Преобразование Лапласа. Основные теоремы операционного исчисления. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем.

§ 1. Преобразование Лапласа. Основные теоремы операционного исчисления

Операционное исчисление является важным разделом математики. Его эффективность и разнообразие применений трудно переоценить. Многие ученые (Лейбниц, Лагранж, Коши, Лаплас, Риман и другие) занимались его развитием. Систематическому применению методов операционного исчисления (главным образом, к решению физических и технических проблем) мы обязаны английскому ученому Хевисайду, которого принято считать основателем операционного исчисления. Современники справедливо упрекали Хевисайда в том, что в его работах не достает математической строгости, однако, Хевисайд получил много результатов, которые впоследствии, после их критической переработки, произведенной другими учеными, оказались во многом основном верными.

Надо отметить, что в развитии операционного исчисления заметную роль сыграли русские и советские ученые. Еще в 1862 г. в Киеве вышла в свет монография М.Я. Ващенко-Захарченко «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений». В ней с помощью операционного метода решаются линейные дифференциальные уравнения, как с постоянными, так и с переменными коэффициентами, а также линейные уравнения с частными производными.

Операционное исчисление нашло применение в теории чисел, математическом анализе, теории автоматического регулирования, электротехнике, горной механике и др.

Идея, лежащая в основе операционного исчисления, заключается в следующем. Каждой функции $f(t)$ из некоторого класса функций $\{f(t)\}$, называемых ***оригиналами***, ставится в соответствие функция $F(p)$ из некоторого класса функций $\{F(p)\}$, называемых ***изображениями***. По определенным законам, по оригиналу $f(t)$ можно определить соответствующее ему изображение $F(p)$, и обратно, по изображению $F(p)$ определить соответствующий ему оригинал $f(t)$ (изображения и оригиналы наиболее «распространенных» функций сводятся в таблицы).

Закон соответствия между оригиналами и изображениями устанавливается так, чтобы операциям дифференцирования оригинала соответствовали алгебраические операции над изображениями. В результате, обыкновенному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами в области оригиналов будет соответствовать линейное алгебраическое уравнение в области изображений — так называемое ***операторное уравнение***. Его решение — ***операторное решение*** — является изображением искомого решения данного дифференциального уравнения. Таким образом, появляется возможность свести решение дифференциального уравнения к решению линейного алгебраического уравнения.

Основным компонентом операционного исчисления является так называемое ***преобразование Лапласа***.

Оригиналом будем называть комплекснозначную функцию $f(t)$ действительного переменного t, обладающую следующими свойствами:

1. Функция $f(t)$ определена и кусочно-дифференцируема на всей числовой оси.

2. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

3. Существуют неотрицательные постоянные M и s_0, такие, что

$$|f(t)| \le Me^{s_0 t} \text{ при } t \ge 0.$$

Выбор этих условий связан с рядом причин. Во-первых, оригиналами в приложениях будут решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, для которых первое условие, очевидно, выполняется.

Во-вторых, класс рассматриваемых функций должен содержать все функции, получаемые в качестве частных решений не-

однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью из этого же класса, при произвольных начальных условиях. Очевидно, что за начальное значение аргумента можно всегда принять нулевое значение. Тогда, с учетом теоремы существования и единственности решения, мы можем требовать выполнения второго условия, поскольку определенное при $t \geq 0$ решение может быть продолжено на всю числовую прямую единственным образом.

Третье условие для решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, как будет показано ниже, также выполняется, если оно выполняется для функции, стоящей в его правой части. Операционное исчисление может быть построено и без предположения о выполнении третьего условия, однако, наложение этого условия существенно облегчает проведение доказательств и не ограничивает возможности приложения доказываемых теорем к решению рассматриваемых в дальнейшем уравнений.

Преобразованием Лапласа над функцией $f(t)$ называется отображение, ставящее ей в соответствие функцию $F(p)$ комплексного переменного p по закону:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы, называется ***интегралом Лапласа***.

Функция $F(p)$ называется ***изображением***, соответствующим оригиналу $f(t)$. Это соответствие будем обозначать следующим образом:

$$f(t) \leftarrow F(p).$$

В дальнейшем будем обозначать оригиналы строчными буквами, а соответствующие им изображения — теми же прописными буквами.

Теорема 1. *Интеграл Лапласа для оригинала* $f(t)$ *сходится в полуплоскости* $\operatorname{Re} p > s_0$.

Доказательство. По определению

$$\left|F(p)\right| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt\right| \le \int_0^{+\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right|dt \le \int_0^{+\infty}\left|Me^{s_0 t}e^{-pt}\right|dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} M\left|e^{(s_0-p)t}\right|dt = \int_0^{+\infty} Me^{(s_0-\operatorname{Re}p)t}\,dt = M\left.\frac{e^{(s_0-\operatorname{Re}p)t}}{s_0-\operatorname{Re}p}\right|_0^{+\infty} =$$

$$= M\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{(s_0-\operatorname{Re}p)t}}{s_0-\operatorname{Re}p} - \frac{1}{s_0-\operatorname{Re}p}\right).$$

Так как $\operatorname{Re}p > s_0$, то

$$\lim_{t\to+\infty} e^{(s_0-\operatorname{Re}p)t} = 0,$$

поэтому

$$\left|F(p)\right| \le M\left(0-\frac{1}{s_0-\operatorname{Re}p}\right) = \frac{M}{\operatorname{Re}p-s_0}.$$

Таким образом, интеграл Лапласа сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}p > s_0$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Если $F(p)$ — изображение некоторого оригинала $f(t)$, то*

$$\lim_{\operatorname{Re}p\to+\infty} F(p) = 0.$$

Доказательство. Как следует из предыдущей теоремы,

$$\left|F(p)\right| \le \frac{M}{\operatorname{Re}p-s_0}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\operatorname{Re}p \to +\infty$, получаем, что

$$\lim_{\operatorname{Re}p\to+\infty}\left|F(p)\right| = 0,$$

откуда, очевидно,

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} F(p) = 0.$$

Следствие доказано.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. *Если $f(t)$ оригинал, то его изображение $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. При этом производная функции $F(p)$ может быть вычислена путем дифференцирования интеграла Лапласа по параметру p.*

Теорема 3 (обращения). *Если $f(t)$ оригинал, а $F(p)$ его изображение, то в точках непрерывности функции $f(t)$ справедливо соотношение*

$$f(t) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt}\, dp, \quad a > s_0. \tag{1}$$

В точках разрыва функции $f(t)$ (которые могут быть только точками разрыва первого рода), интеграл, стоящий в правой части (1), сходится к

$$\frac{f(t+0) - f(t-0)}{2}.$$

Теорема 4 (линейности). *Пусть $f(t)$ и $g(t)$ оригиналы, а $F(p)$ и $G(p)$ их изображения. Тогда*

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftarrow \alpha F(p) + \beta G(p)$$

для любых комплексных чисел α и β.

Доказательство. По определению,

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftarrow \int_0^{+\infty} \left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) e^{-pt}\, dt =$$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt}\, dt = \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Теорема доказана.

Теорема 5 (подобия). *Если $f(t)$ оригинал, а $F(p)$ его изображение, то*

$$f(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

для любого действительного числа $\alpha > 0$.

Доказательство. По определению,

$$f(\alpha t) \leftarrow \int_0^{+\infty} f(\alpha t)\, e^{-pt}\, dt = \left| \begin{array}{c} u = \alpha t \\ du = \alpha\, dt \\ 0 \to 0 \\ +\infty \to +\infty \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-\frac{p}{\alpha}u} \frac{1}{\alpha} du =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-\frac{p}{\alpha}u}\, du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 6 (запаздывания). *Если $\tau > 0$ и $f(t) \leftarrow F(p)$, то*

$$e^{-p\tau} F(p) \leftarrow \begin{cases} f(t-\tau), & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Доказательство. По определению,

$$f(t-\tau) \leftarrow \int_0^{+\infty} f(t-\tau)\, e^{-pt}\, dt = \left| \begin{array}{c} u = t - \tau \\ du = dt \\ 0 \to -\tau \\ +\infty \to +\infty \end{array} \right| = \int_{-\tau}^{+\infty} f(u)\, e^{-p(u+\tau)}\, dt =$$

$$= \int_{-\tau}^{+\infty} f(u)\, e^{-pu} e^{-p\tau}\, dt = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} f(u)\, e^{-pu}\, dt =$$

$$= e^{-p\tau} \left(\int_{-\tau}^{0} f(u)\, e^{-pu}\, dt + \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-pu}\, dt \right) =$$

$$= e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-pu}\, dt = e^{-p\tau} F(p),$$

поскольку функция $f(u)$ обращается в нуль при $u < 0$, так что

$$\int_{-\tau}^{0} f(u)\, e^{-pu}\, dt = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 7 (смещения). *Если $f(t)$ оригинал, а $F(p)$ его изображение, то*

$$e^{\lambda t} f(t) \leftarrow F(p-\lambda)$$

для любого комплексного числа λ.

Доказательство. По определению,

$$e^{\lambda t} f(t) \leftarrow \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(p-\lambda)t}\, dt = F(p-\lambda).$$

Теорема доказана.

Теорема 8 (дифференцирования оригинала). *Если $f'(t)$ существует на интервале $(0, +\infty)$ и является оригиналом, то*

$$f'(t) \leftarrow pF(p) - f(0),$$

где $f(t) \leftarrow F(p)$, а $f(0)$ — правосторонний предел функции $f(t)$ в точке $t = 0$.

Доказательство. По определению,

$$f'(t) \leftarrow \int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, df(t).$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, df(t) = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\, de^{-pt}.$$

Так как $\operatorname{Re} p > s_0$, то, по определению,

$$\left|e^{-pt} f(t)\right| = e^{-(\operatorname{Re} p)t}\left|f(t)\right| \le M e^{s_0 t} e^{-(\operatorname{Re} p)t} = M e^{(s_0 - \operatorname{Re} p)t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

следовательно,

$$e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} = 0 - f(0)$$

и

$$f'(t) \leftarrow 0 - f(0) + p\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt = pF(p) - f(0).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $f^{(n)}(t)$ *существует на интервале* $(0, +\infty)$ *и является оригиналом, то*

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f(t) \leftarrow F(p)$, *а* $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ — *правосторонние пределы функции* $f(t)$ *и ее производных в точке* $t = 0$.

Следствие легко доказывается по индукции (докажите самостоятельно!).

Теорема 9 (дифференцирования изображения). *Если* $f(t) \leftarrow F(p)$, *то*

$$-tf(t) \leftarrow \frac{d}{dp} F(p).$$

Доказательство. Согласно теореме 2,

$$\frac{d}{dp} F(p) = \int_0^{+\infty} \left(f(t) e^{-pt}\right)'_p\, dt = \int_0^{+\infty} \left(-tf(t)\right) e^{-pt}\, dt,$$

т. е., по определению,

$$-tf(t) \leftarrow \frac{d}{dp} F(p).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $f(t) \leftarrow F(p)$, *то*

$$(-1)^n t^n f(t) \leftarrow \frac{d^n}{dp^n} F(p).$$

Следствие легко доказывается по индукции (докажите самостоятельно!).

Теорема 10 (интегрирования оригинала). *Если* $f(t) \leftarrow F(p)$, *то*

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \leftarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

и поищем изображение

$$F_\varphi(p) \to \varphi(t).$$

Заметим, что $\varphi(0) = 0$, и применим к функции $\varphi(t)$ теорему о дифференцировании оригинала:

$$\varphi'(t) \leftarrow pF_\varphi(p) - \varphi(0).$$

Поскольку

$$\varphi'(t) = f(t),$$

то

$$f(t) \leftarrow pF_\varphi(p) = F(p),$$

откуда

$$F_\varphi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Теорема доказана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 11 (о свертке). *Если* $f(t) \leftarrow F(p)$ *и* $g(t) \leftarrow G(p)$, *то*

$$F(p)G(p) \rightarrow \int_0^t f(x)g(x-t)\,dx = \int_0^t f(x-t)g(x)\,dx = S(t).$$

Функция $S(t)$ называется ***сверткой*** функций $f(t)$ и $g(t)$.

Найдем изображение ***единичной функции Хевисайда*** $\eta(t)$, определяемой следующим образом:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

(постройте самостоятельно ее график!) или, кратко,

$$\eta(t) = 1.$$

Замечание. В дальнейшем, под функциями 1, e^t, $\cos t$ и пр., мы будем понимать функции, совпадающие с этими функциями при $t \geq 0$, и тождественно равные нулю при $t < 0$.

Итак,

$$\eta(t) \leftarrow \int_0^{+\infty} \eta(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{p}(0-1) = \frac{1}{p}$$

(в данном случае, очевидно, $s_0 = 0$, поэтому $\operatorname{Re} p > 0$).

Таким образом,

$$1 \leftarrow \frac{1}{p}.$$

Используя определение преобразования Лапласа и его свойства, можно составить таблицу.

Таблица основных оригиналов и их изображений

№ п/п	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
5	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
6	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
7	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
9	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
10	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
11	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
12	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
13	$\frac{t^n}{n!}e^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p-\lambda)^{n+1}}$

Окончание таблицы

№ п/п	Оригинал	Изображение
14	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
15	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
16	$t\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
17	$t\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
18	$\dfrac{\sin\omega t-\omega t\cos\omega t}{2\omega^3}$	$\dfrac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
19	$\dfrac{\omega t\operatorname{ch}\omega t-\operatorname{sh}\omega t}{2\omega^3}$	$\dfrac{1}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
20	$e^{\lambda t}\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
21	$e^{\lambda t}\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
22	$\cos(\omega t-b)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}e^{-\frac{b}{\omega}}$

Пример 1. Найти изображение $F(p)$ функции

$$f(t)=\cos^3 t.$$

Решение. Воспользовавшись формулой

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2},$$

получаем:

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} + \frac{3}{4}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t.$$

Тогда, согласно формуле 6, имеем:

$$F(p) = \frac{1}{4}\frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{4}\frac{p}{p^2+1} = \frac{p\left(p^2+7\right)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+9\right)},$$

так что

$$\cos^3 t \leftarrow \frac{p\left(p^2+7\right)}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+9\right)}.$$

Пример 2. Найти оригинал $f(t)$ функции

$$F(p) = \frac{1}{p\left(p^4+1\right)}.$$

Решение. Имеем:

$$F(p) = \frac{1}{p\left(p^4+1\right)} = \frac{1}{p^5}\frac{1}{1+\frac{1}{p^4}} = \frac{1}{p^5}\left(1 - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^8} - \cdots\right) = \frac{1}{p^5} - \frac{1}{p^9} + \frac{1}{p^{13}} - \cdots.$$

Полученный ряд сходится при $|p| > 1$. Таким образом, согласно формуле 4,

$$f(t) \leftarrow \frac{t^4}{4!} - \frac{t^8}{8!} + \frac{t^{12}}{12!} - \cdots.$$

Пример 3. Найти оригинал функции

$$F(p) = \frac{p}{p^2-2p+5}.$$

Решение. Представим данную функцию в виде линейной комбинации дробей, оригиналы которых известны:

$$\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{(p-1)+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^2+4}.$$

Воспользовавшись формулами 10 и 11, имеем:

$$f(t)=e^t\cos 2t+\frac{1}{2}e^t\sin 2t=e^t\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

Пример 4. С помощью преобразования Лапласа найти изображения функции e^t.

Решение. Имеем

$$e^t \leftarrow \int_0^\infty e^x e^{-px}dx=\int_0^\infty e^{(1-p)x}dx=\left.\frac{e^{(1-p)x}}{1-p}\right|_0^\infty=\frac{1}{p-1}.$$

Пример 5. С помощью преобразования Лапласа найти изображения функции $\cos t$.

Решение. Имеем

$$\cos t \leftarrow \int_0^\infty \cos x\, e^{-px}dx.$$

Если

$$J(p)=\int_0^\infty \cos x\, e^{-px}dx,$$

то дважды интегрируя по частям, имеем

$$J(p)=\int_0^\infty e^{-px}d\sin x=\sin x\, e^{-px}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty \sin x\, e^{-px}dx=$$

$$=-p\int_0^\infty e^{-px}d\cos x=-p\left(\cos x\, e^{-px}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty \cos x\, e^{-px}dx\right)=$$

$$=p-p^2J(p),$$

откуда

$$J(p)=\frac{p}{1+p^2}.$$

Пример 6. Найти изображение функций $\sin t$ с помощью теоремы дифференцирования оригинала.

Решение.

$$\sin t \leftarrow F(p),$$

$$(\sin t)' \leftarrow pF(p),$$

$$(\sin t)'' = -\sin t \leftarrow p^2F(p)-1.$$

Следовательно,

$$F(p)=-p^2F(p)+1,$$

откуда

$$F(p)=\frac{1}{1+p^2}.$$

§ 2. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x''+a_1x'+a_2x=f(t) \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x(0)=x_0,\ \ x'(0)=x_0^1. \tag{3}$$

Будем считать, что функция $f(t)$ и искомое решение $x(t)$ задачи Коши (2)–(3) вместе с его производными до второго порядка включительно являются оригиналами.

Пусть

$$x(t) \leftarrow X(p)$$

и

$$f(t) \leftarrow F(p).$$

Тогда

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - x_0,$$

$$x''(t) \leftarrow p^2 X(p) - px_0 - x_0^1.$$

Подвергнув дифференциальное уравнение преобразованию Лапласа, приходим к операторному уравнению

$$\left(p^2 X(p) - px_0 - x_0^1\right) + a_1\left(pX(p) - x_0\right) + a_2 X(p) = F(p),$$

из которого находим операторное решение:

$$X(p) = \frac{F(p) + x_0(p + a_1) + x_0^1}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Оригинал, соответствующий изображению $X(p)$, является искомым решением задачи Коши (2)–(3).

Аналогичным образом можно решить задачу Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 1. Найти решение задачи Коши

$$x'' - 5x' + 4x = 4,$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$$

Решение. Поскольку

$$4 \leftarrow \frac{4}{p},$$

операторное уравнение имеет вид

$$\left(p^2 - 5p + 4\right) X(p) = \frac{4}{p} + 2,$$

откуда

$$X(p)=\frac{2p+4}{p\left(p^2-5p+4\right)}.$$

Представив найденное изображение в виде

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{2}{p-1}+\frac{1}{p-4},$$

получаем искомый оригинал:

$$x(t)=1-2e^{t}+e^{4t}.$$

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения

$$x''+4x'+4x=8e^{-2t}$$

с начальными условиями

$$x(0)=1,\ \ x'(0)=1.$$

Решение. Поскольку

$$8e^{-2t}\leftarrow\frac{8}{p+2},$$

операторное уравнение имеет вид

$$\left(p^2+4p+4\right)X(p)=\frac{8}{p+2}+p+5,$$

откуда

$$X(p)=\frac{p^2+7p+18}{(p+2)^3}.$$

Представив найденное изображение в виде

$$X(p)=\frac{8}{(p+2)^3}+\frac{3}{(p+2)^2}+\frac{1}{p+2},$$

получаем искомый оригинал:

$$x(t)=4t^2e^{-2t}+3te^{-2t}+e^{-2t}=e^{-2t}\left(4t^2+3t+1\right).$$

§ 3. Применение операционного исчисления к решению линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную систему из двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + f_2(t), \end{cases}$$

при начальных условиях

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Введем в рассмотрение изображения искомых функций, их производных и функций $f_1(t)$, $f_2(t)$:

$$x(t) \leftarrow X(p),$$

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - x_0,$$

$$y(t) \leftarrow Y(p),$$

$$y'(t) \leftarrow pY(p) - y_0.$$

$$f_1(t) \leftarrow F_1(p),$$

$$f_2(t) \leftarrow F_2(p)$$

и составим операторную систему

$$\begin{cases} pX(p) = a_1 X(p) + b_1 Y(p) + F_1(p) + x_0, \\ pY(p) = a_2 X(p) + b_2 Y(p) + F_2(p) + y_0. \end{cases}$$

Эта система является линейной системой двух уравнений с двумя неизвестными $X(p)$ и $Y(p)$. Решая ее, мы найдем $X(p)$ и $Y(p)$, а затем, переходя к оригиналам, получим искомое решение $x(t)$, $y(t)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Аналогично решаются линейные системы с постоянными коэффициентами большего порядка:

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i + f_k(t), \quad k = 1, \ldots, n,$$

где

$$a_{ki} = \text{const}, \quad k, i = 1, \ldots, n,$$

при начальных условиях

$$x_k(0) = x_k^0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пример. Найти решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y + 5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y - 37t, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = y(0) = 0.$$

Решение. Так как

$$5 \leftarrow \frac{5}{p},$$

$$-37t \leftarrow -\frac{37}{p^2},$$

то операторная система будет иметь вид

$$\begin{cases} pX(p) = -7X(p) + Y(p) + \dfrac{5}{p}, \\ pY(p) = -2X(p) - 5Y(p) - \dfrac{37}{p^2}. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$X(p) = \frac{5p^2 + 25p - 37}{p^2\left(p^2 + 12p + 37\right)},$$

$$Y(p) = \frac{-47p - 259}{p^2\left(p^2 + 12p + 37\right)}.$$

Разлагая дроби, стоящие в правых частях, на элементарные, имеем:

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{p+6}{(p+6)^2 + 1},$$

$$Y(p) = -\frac{1}{p} + \frac{7}{p^2} + \frac{p+5}{(p+6)^2 + 1}.$$

Переходя к оригиналам, получим искомое решение:

$$x(t) = 1 - t - e^{-6t}\cos t,$$

$$y(t) = -1 + 7t + e^{-6t}\cos t - e^{-6t}\sin t.$$

Математика — это больше, чем наука, это язык.

Нильс Бор

Глава 5
Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и их системы

Применение операционного исчисления для изучения структуры решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Явление резонанса. Метод Эйлера. Метод Даламбера.

§ 1. Применение операционного исчисления для изучения структуры решения линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Основная идея использования операционного исчисления для решения линейных дифференциальных уравнений заключается в следующем. Если подвергнуть преобразованию Лапласа левую и правую часть исходного уравнения, мы получим алгебраическое уравнение относительно изображения $X(p)$ искомого решения $x(t)$. Определив $X(p)$, и используя таблицу из предыдущей главы, находим искомое решение $x(t)$ исходного дифференциального уравнения.

Лемма 1.

$$\frac{1}{\left(p^2+1\right)^n} \to \frac{1}{(n-1)!^2\, 4^{n-1}} \int_0^t \left(t^2-x^2\right)^{n-1} \cos x\, dx, \quad n \geq 1.$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. При $n=1$ имеем:

$$\frac{1}{p^2+1} \to \int_0^t \cos t\,dt = \sin t.$$

Пусть утверждение верно для $n=k$, т. е.

$$\frac{1}{\left(p^2+1\right)^k} \to \frac{1}{(k-1)!^2\,4^{k-1}} \int_0^t \left(t^2-x^2\right)^{k-1} \cos x\,dx. \qquad (1)$$

Покажем, что оно выполняется при $n=k+1$. Применим к левой части соотношения (1) теорему о дифференцировании изображения:

$$-\frac{2pk}{\left(p^2+1\right)^{k+1}} \to \frac{-t}{(k-1)!^2\,4^{k-1}} \int_0^t \left(t^2-x^2\right)^{k-1} \cos x\,dx,$$

откуда

$$\frac{p}{\left(p^2+1\right)^{k+1}} \to \frac{t}{(k-1)!^2\,k2^{2k-1}} \int_0^t \left(t^2-x^2\right)^{k-1} \cos x\,dx.$$

Воспользуемся теоремой об интегрировании изображения:

$$\frac{1}{\left(p^2+1\right)^{k+1}} \to \frac{1}{(k-1)!^2\,k2^{2k-1}} \int_0^t \tau\,d\tau \int_0^\tau \left(\tau^2-x^2\right)^{k-1} \cos x\,dx$$

и поменяем порядок интегрирования в повторном интеграле в правой части полученного соотношения (изобразите самостоятельно область интегрирования на плоскости $xO\tau$):

$$\frac{1}{(k-1)!^2\,k2^{2k-1}} \int_0^t \tau\,d\tau \int_0^\tau \left(\tau^2-x^2\right)^{k-1} \cos x\,dx =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!^2\,k2^{2k-1}} \int_0^t dx \int_x^t \tau \left(\tau^2-x^2\right)^{k-1} \cos x\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!^2\,k2^{2k-1}} \int_0^t \left(\cos x \frac{\left(\tau^2-x^2\right)^k}{2k} \right)\Bigg|_{\tau=x}^{\tau=t} dx =$$

$$=\frac{1}{k!^2\,4^k}\int_0^t\left(t^2-x^2\right)^k\cos x\,dx.$$

Лемма доказана.

Следствие.

$$\frac{1}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^n}\to\frac{t^{2n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!^2\,4^{n-1}}\int_0^1\left(1-y^2\right)^{n-1}\cos(y\omega t)\,dy,\quad n\ge 1.$$

Доказательство. Воспользовавшись теоремой подобия, имеем:

$$\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^n}=\frac{1}{\omega^{2n}\left(\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1\right)^n}\to\frac{1}{\omega^{2n-1}(n-1)!^2\,4^{n-1}}\int_0^{\omega t}\left(\omega^2t^2-x^2\right)^{n-1}\cos x\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}x=y\omega t\\ dx=\omega t\,dy\\ 0\to 0\\ \omega t\to 1\end{array}\right|=\frac{1}{\omega^{2n-1}(n-1)!^2\,4^{n-1}}\int_0^1\left(\omega^2t^2-y^2\omega^2t^2\right)^{n-1}\cos(y\omega t)\,\omega t\,dy=$$

$$=\frac{1}{\omega^{2n-1}(n-1)!^2\,4^{n-1}}\int_0^1\left(\omega^2t^2\left(1-y^2\right)\right)^{n-1}\cos(y\omega t)\,\omega t\,dy=$$

$$=\frac{t^{2n-1}}{(n-1)!^2\,4^{n-1}}\int_0^1\left(1-y^2\right)^{n-1}\cos(y\omega t)\,dy.$$

Теорема смещения завершает доказательство. **Следствие доказано.**

Лемма 2.

$$\frac{Mp+N}{\left(p^2-2\alpha p+\gamma\right)^n}\to e^{\alpha t}\left(P(t)\cos\omega t+Q(t)\sin\omega t\right),\quad n\ge 0,$$

где

$$\alpha^2-\gamma=-\omega^2<0,$$

а $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены степени не выше $n-1$, причем по крайней мере один из них имеет степень $n-1$.

Доказательство. Используя предыдущую лемму и теорему о дифференцировании оригинала, получаем:

$$\frac{Mp+N}{\left(p^2-2\alpha p+\gamma\right)^n}=\frac{Mp+N}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^n}\to$$

$$\to N\frac{t^{2n-1}e^{\alpha t}}{(n-1)!^2\,4^{n-1}}\int_0^1\left(1-y^2\right)^{n-1}\cos(y\omega t)\,dy+$$

$$+M\frac{1}{(n-1)!^2\,4^{n-1}}\left(t^{2n-1}e^{\alpha t}\int_0^1\left(1-y^2\right)^{n-1}\cos(y\omega t)\,dy\right)'_t=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!^2\,4^{n-1}}\left(Ne^{\alpha t}J(t)+M\left(e^{\alpha t}J(t)\right)'\right),$$

где

$$J(t)=t^{2n-1}\int_0^1\left(1-y^2\right)^{n-1}\cos(y\omega t)\,dy.$$

Тогда

$$\frac{1}{(n-1)!^2\,4^{n-1}}\left(Ne^{\alpha t}J(t)+M\left(e^{\alpha t}J(t)\right)'\right)=$$

$$=\frac{e^{\alpha t}}{(n-1)!^2\,4^{n-1}}\left((N+M\alpha)J(t)+MJ'(t)\right).$$

Несложно убедиться в справедливости формулы

$$\int P(t)\cos at\,dt = \frac{\sin at}{a}\left(P(t) - \frac{P''(t)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(t)}{a^4} - \cdots\right) +$$

$$+\frac{\cos at}{a}\left(\frac{P'(t)}{a} - \frac{P'''(t)}{a^3} + \frac{P^{(5)}(t)}{a^5} - \cdots\right),$$

где $P(x)$ — многочлен некоторой степени (проверьте самостоятельно дифференцированием!).

Применим эту формулу для подсчета $J(t)$, полагая $P_{2n-2}(y) = (1-y^2)^{n-1}$:

$$J(t) = t^{2n-1}\int_0^1 (1-y^2)^{n-1}\cos(y\omega t)\,dy =$$

$$= t^{2n-1}\left(\frac{\sin y\omega t}{\omega t}\left(P_{2n-2}(y) - \frac{P''_{2n-2}(y)}{\omega^2 t^2} + \cdots\right) +\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos y\omega t}{\omega t}\left(\frac{P'_{2n-2}(y)}{\omega t} - \frac{P'''_{2n-2}(y)}{\omega^3 t^3} + \cdots\right)\right)\right|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= t^{2n-1}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega t}\left(P_{2n-2}(1) - \frac{P''_{2n-2}(1)}{\omega^2 t^2} + \cdots\right) + \frac{\cos\omega t}{\omega t}\left(\frac{P'_{2n-2}(1)}{\omega t} - \frac{P'''_{2n-2}(1)}{\omega^3 t^3} + \cdots\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{P'_{2n-2}(0)}{\omega^2 t^2} - \frac{P'''_{2n-2}(0)}{\omega^4 t^4} + \cdots\right)\right).$$

Заметим, что многочлен $P_{2n-2}(y)$ содержит только четные степени, поэтому все производные нечетных степеней в нуле равны нулю:

$$P'_{2n-2}(0) = P'''_{2n-2}(0) = \cdots = 0.$$

Следовательно,

$$J(t)=\sin\omega t\left(t^{2n-2}\frac{P_{2n-2}(1)}{\omega}-t^{2n-4}\frac{P''_{2n-2}(1)}{\omega^3}+\cdots\right)+$$

$$+\cos\omega t\left(t^{2n-3}\frac{P'_{2n-2}(1)}{\omega^2}-t^{2n-5}\frac{P'''_{2n-2}(1)}{\omega^4}+\cdots\right).$$

Заметим, что $y=1$ является корнем $(n-1)$-й кратности для многочлена $P_{2n-2}(y)$, следовательно, в этой точке обращается в нуль сам многочлен и все его производные до $(n-2)$-го порядка включительно, а $P_{2n-2}^{(n-1)}(1)\neq 0$, поэтому

$$J(t)=A(t)\cos\omega t+B(t)\sin\omega t,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — многочлены степени не выше $n-1$, причем по крайней мере один из них имеет степень $n-1$.

При этом

$$J'(t)=\left(A'(t)+\omega B(t)\right)\cos\omega t+\left(B'(t)-\omega A(t)\right)\sin\omega t,$$

причем, очевидно, многочлены при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ имеют степени не выше $n-1$, причем по крайней мере один из них имеет степень $n-1$.

Тогда

$$\frac{Mp+N}{\left(p^2-2\alpha p+\gamma\right)^n}\to\frac{e^{\alpha t}}{(n-1)!^2\,4^{n-1}}\left((N+M\alpha)J(t)+MJ'(t)\right)=$$

$$=P(t)\cos\omega t+Q(t)\sin\omega t,$$

причем $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены степени не выше $n-1$ и по крайней мере один из них имеет степень $n-1$. **Лемма доказана.**

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t), \quad a_0 \neq 0. \tag{2}$$

Уравнение

$$\Delta(p) = 0,$$

где

$$\Delta(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n,$$

называется ***характеристическим уравнением*** для дифференциального уравнения (2).

Пусть $y(t)$ — решение дифференциального уравнения (2) с начальными условиями

$$y(t_0) = y_0, \; y'(t_0) = y_0', \; y''(t_0) = y_0'', \; \dots, \; y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3}$$

а $Y(p)$ — его изображение. Тогда имеем:

$$y(t) \leftarrow Y(p),$$

$$y'(t) \leftarrow pY(p) - y_0,$$

$$y''(t) \leftarrow p^2 Y(p) - py_0 - y_0',$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)}(t) \leftarrow p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \dots - y_0^{(n-1)}.$$

Подвергнув дифференциальное уравнение (2) преобразованию Лапласа, с учетом теоремы линейности, имеем:

$$\Delta(p) Y(p) - P_{n-1}\left(p, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) = F(p),$$

где

$$f(x) \leftarrow F(p).$$

Следовательно,

$$Y(p)=\frac{P_{n-1}\left(p,\, y_0,\, y_0',\, \ldots,\, y_0^{(n-1)}\right)}{\Delta(p)}+\frac{F(p)}{\Delta(p)}, \qquad (4)$$

где $P_{n-1}\left(p,\, y_0,\, y_0',\, \ldots,\, y_0^{(n-1)}\right)$ — многочлен $(n-1)$-го порядка.

Заметим, что первое слагаемое в (4) является изображением общего решения линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего линейному неоднородному дифференциальному уравнению (2), а второе слагаемое — изображением частного решения неоднородного дифференциального уравнения (2). При этом первое слагаемое в (4) представляет собой ***правильную*** дробно-рациональную функцию, так как степень числителя меньше степени знаменателя.

Пусть многочлен $\Delta(p)$ представим в виде

$$\Delta(p)=(p-a)^k\cdot\ \ldots\ \cdot\left(p^2-2\alpha p+\gamma\right)^m\cdot\ \ldots,$$

где $\omega=\sqrt{\gamma-\alpha^2}$, a — действительный корень кратности k, а $\alpha\pm\omega i$ — комплексно-сопряженные корни кратности m.

Тогда, согласно теореме о разложении дробно-рациональной функции на элементарные дроби, имеем:

$$\frac{P_{n-1}\left(p,\, y_0,\, y_0',\, \ldots,\, y_0^{(n-1)}\right)}{\Delta(p)}=\frac{C_1}{p-a}+\frac{C_2}{(p-a)^2}+\cdots+\frac{C_k}{(p-a)^k}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{M_1p+N_1}{p^2-2\alpha p+\gamma}+\frac{M_2p+N_2}{\left(p^2-2\alpha p+\gamma\right)^2}+\cdots+\frac{M_mp+N_m}{\left(p^2-2\alpha p+\gamma\right)^m},$$

где C_i, M_i, N_i — постоянные.

Найдем оригинал, соответствующий этому изображению. С учетом леммы 2, имеем:

$$y_{\text{общ. однор.}}=C_1e^{at}+C_2te^{at}+\cdots+\frac{C_k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}+\cdots$$

$$\cdots + e^{\alpha t}\left(A_{11}\cos\omega t + B_{11}\sin\omega t\right) +$$

$$+ e^{\alpha t}\left(\left(A_{12} + A_{22}t\right)\cos\omega t + \left(B_{12} + B_{22}t\right)\sin\omega t\right) + \cdots$$

$$\cdots + e^{\alpha t}\left(\left(A_{1m} + A_{2m}t + A_{mm}t^{m-1}\right)\cos\omega t +\right.$$

$$\left. + \left(B_{1m} + B_{2m}t + \cdots + B_{mm}t^{m-1}\right)\sin\omega t\right) + \cdots.$$

Заметим, что, зная корни характеристического уравнения, можно сразу записать общий вид общего решения однородного дифференциального уравнения, а постоянные C_i, A_{ij}, B_{ij} определить из начальных условий (3).

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых отвечает корню характеристического уравнения с учетом его кратности. А именно, если a — действительный корень кратности k, то в общем решении ему отвечает слагаемое вида*

$$\left(C_0 + C_1 t + \cdots + C_{k-1}t^{k-1}\right)e^{at},$$

где C_0, C_1, ..., C_{k-1} — постоянные, определяемые из начальных условий. Если же $\alpha \pm \omega i$ — пара комплексно-сопряженных корней кратности m, то в общем решении им отвечает слагаемое вида

$$e^{\alpha t}\left(\left(A_0 + A_1 t + A_{m-1}t^{m-1}\right)\cos\omega t + \left(B_0 + B_1 t + \cdots + B_{m-1}t^{m-1}\right)\sin\omega t\right),$$

где A_0, A_1, ..., A_{m-1}, B_0, B_1, ..., B_{m-1} — постоянные, определяемые из начальных условий.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$p^3 - 5p^2 + 6p = 0.$$

Оно имеет различные действительные корни:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 3.$$

Поэтому

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

является общим решением исходного уравнения.

Определим постоянные C_1, C_2, C_3 таким образом, чтобы получившееся частное решение удовлетворяло заданным начальным условиям.

Поскольку

$$y' = 2C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{3x},$$

$$y'' = 4C_2 e^{2x} + 9C_3 e^{3x},$$

то постоянные C_1, C_2, C_3 должны удовлетворять следующей линейной системе:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ 2C_2 + 3C_3 = 1, \\ 4C_2 + 9C_3 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = -\frac{5}{6}, \quad C_2 = \frac{3}{2}, \quad C_3 = -\frac{2}{3}.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = -\frac{5}{6} + \frac{3}{2} e^{2x} - \frac{2}{3} e^{3x}.$$

§ 2. Применение операционного исчисления для изучения структуры решения линейного неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим второе слагаемое в соотношении (4), представляющее собой изображение частного решения дифференциального уравнения (2). Будем при этом предполагать, что функция $f(x)$ является так называемым ***квазимногочленом***, т. е. имеет следующий вид:

$$f(x)=e^{\alpha t}\left(\left(A_0+A_1t+\dots+A_kt^k\right)\cos\omega t+\left(B_0+B_1t+\dots+B_mt^m\right)\sin\omega t\right),$$

где α, ω, A_0, ..., A_k, B_0, ..., B_m — действительные числа.

Тогда изображение $F(p)$ квазимногочлена $f(x)$ будет иметь вид

$$F(p)=A_0\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}-A_1\left(\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)'+\dots$$

$$\dots+(-1)^kA_k\left(\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(k)}+B_0\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}-$$

$$-B_1\left(\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)'+\dots+(-1)^m\left(\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(m)}.$$

Введем обозначение:

$$l=\max(k,\ m).$$

Лемма 3.

$$\left(\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(l)}=\frac{T_{l+1}(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{l+1}},\quad l=0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

где $T_{l+1}(p)$ — многочлен $(l+1)$-й степени.

Доказательство. Докажем индукцией по l. При $l=0$ равенство очевидно. Пусть оно выполняется при $l=n$, т. е.

$$\left(\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(n)}=\frac{T_{n+1}(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+1}};$$

покажем, что оно будем иметь место и при $l=n+1$.

Продифференцируем это равенство по p:

$$\left(\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(n+1)}=\left(\left(\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(n)}\right)'=\left(\frac{T_{n+1}(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+1}}\right)'=$$

$$=\frac{T'_{n+1}(p)\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+1}-T_{n+1}(p)\left(\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+1}\right)'}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{2n+2}}=$$

$$=\frac{T'_{n+1}(p)\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+1}-2(n+1)(p-\alpha)T_{n+1}(p)\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n}}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{2n+2}}=$$

$$=\frac{T'_{n+1}(p)\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)-2(n+1)(p-\alpha)T_{n+1}(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+2}}=\frac{T_{n+2}(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+2}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.

$$\left(\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(l)}=\frac{S_l(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{l+1}},\quad l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $S_l(p)$ — многочлен l-й степени.

Доказательство. Докажем индукцией по l. При $l=0$ равенство очевидно. Пусть оно выполняется при $l=n$, т. е.

$$\left(\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(n)}=\frac{S_n(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+1}};$$

покажем, что оно будем иметь место и при $l=n+1$.

Продифференцируем это равенство по p:

$$\left(\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(n+1)}=\left(\left(\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(n)}\right)'=\left(\frac{S_n(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+1}}\right)'=$$

$$=\frac{S_n'(p)\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+1}-S_n(p)\left(\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+1}\right)'}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{2n+2}}=$$

$$=\frac{S_n'(p)\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+1}-2(n+1)(p-\alpha)S_n(p)\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n}}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{2n+2}}=$$

$$=\frac{S_n'(p)\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)-2(n+1)(p-\alpha)S_n(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+2}}=\frac{S_{n+1}(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{n+2}}.$$

Лемма доказана.

С учетом этих лемм, заключаем, что $F(p)$ имеет вид

$$F(p)=\frac{Q_r(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{l+1}},\quad r<2(l+1).$$

Пусть $\alpha+i\omega$ — корень кратности q для характеристического уравнения

$$\Delta(p)=0.$$

Следовательно,

$$\Delta(p)=\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^q R(p),$$

где

$$R(\alpha\pm i\omega)\neq 0.$$

Тогда

$$\frac{F(p)}{\Delta(p)}=\frac{Q_r(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{l+1}\Delta(p)}=\frac{Q_r(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{q+l+1}R(p)}=$$

$$=\frac{\tilde{Q}_{\tilde{r}}(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{q+l+1}}+\tilde{R}(p),\quad \tilde{r}<2(q+l+1),$$

где $\tilde{R}(p)$ — сумма правильных дробей, соответствующих корням характеристического уравнения, отличным от $\alpha\pm i\omega$. Очевидно, что каждая из функций, являющихся оригиналами этих дробей, будет решением линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего линейному неоднородному дифференциальному уравнению (2).

Заметим, что

$$\frac{\tilde{Q}_{\tilde{r}}(p)}{\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^{q+l+1}}\to e^{\alpha t}\left(P_{q+l}(t)\cos\omega t+T_{q+l}(t)\sin\omega t\right),$$

так что

$$y_{\text{частн. неоднор.}}=e^{\alpha t}\left(P_{q+l}(t)\cos\omega t+T_{q+l}(t)\sin\omega t\right),\qquad(5)$$

где $P_{q+l}(t)$ и $T_{q+l}(t)$ — многочлены степени $q+l$.

Представим их в следующем виде:

$$P_{q+l}(t) = D_0 t^{q+l} + D_1 t^{q+l-1} + \dots + D_{q+l} =$$

$$= D_0 t^{q+l} + D_1 t^{q+l-1} + \dots + D_l t^q + D_{l+1} t^{q-1} + \dots + D_{q+l} =$$

$$= t^q \left(D_0 t^l + D_1 t^{l-1} + \dots + D_l\right) + D_{l+1} t^{q-1} + \dots + D_{q+l}$$

и

$$T_{q+l}(t) = E_0 t^{q+l} + E_1 t^{q+l-1} + \dots + E_{q+l} =$$

$$= E_0 t^{q+l} + E_1 t^{q+l-1} + \dots + E_l t^q + E_{l+1} t^{q-1} + \dots + E_{q+l} =$$

$$= t^q \left(E_0 t^l + E_1 t^{l-1} + \dots + E_l\right) + E_{l+1} t^{q-1} + \dots + E_{q+l}$$

и подставим в формулу (5):

$$y_{\text{частн. неоднор.}} = e^{\alpha t}\left(P_{q+l}(t)\cos\omega t + T_{q+l}(t)\sin\omega t\right) =$$

$$= e^{\alpha t}\left(\left(t^q\left(D_0 t^l + D_1 t^{l-1} + \dots + D_l\right) + D_{l+1} t^{q-1} + \dots + D_{q+l}\right)\cos\omega t +\right.$$

$$\left. + \left(t^q\left(E_0 t^l + E_1 t^{l-1} + \dots + E_l\right) + E_{l+1} t^{q-1} + \dots + E_{q+l}\right)\sin\omega t\right) =$$

$$= t^q e^{\alpha t}\left(\left(D_0 t^l + D_1 t^{l-1} + \dots + D_l\right)\cos\omega t + \left(E_0 t^l + E_1 t^{l-1} + \dots + E_l\right)\sin\omega t\right) +$$

$$+ e^{\alpha t}\left(\left(D_{l+1} t^{q-1} + \dots + D_{q+l}\right)\cos\omega t + \left(E_{l+1} t^{q-1} + \dots + E_{q+l}\right)\sin\omega t\right).$$

Заметим, что второе слагаемое в полученном выражении, согласно теореме 1, является решением линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего линейному неоднородному дифференциальному уравнению (2) — оно соответствует паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\omega$ кратности q характеристического уравнения. Следовательно, искомым частным решением дифференциального уравнения (2) является первое слагаемое.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазимногочлена*

$$e^{\alpha t}\left(\left(A_0+A_1t+\cdots+A_kt^k\right)\cos\omega t+\left(B_0+B_1t+\cdots+B_mt^m\right)\sin\omega t\right)$$

имеет вид

$$y=t^qe^{\alpha t}\left(\left(D_0t^l+D_1t^{l-1}+\cdots+D_l\right)\cos\omega t+\left(E_0t^l+E_1t^{l-1}+\cdots+E_l\right)\sin\omega t\right),$$

где q — кратность $\alpha+i\omega$ как корня характеристического уравнения, D_0, ..., D_l, E_0, ..., E_l — постоянные, а

$$l=\max(k,\ m).$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV}+y=4\cos x.$$

Решение. Характеристическим уравнением для рассматриваемой задачи будет уравнение

$$p^4+1=0.$$

Его корни таковы:

$$p_k=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

или

$$p_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad p_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$p_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),\quad p_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Тогда

$$p^4+1=\left(\left(p-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\left(\left(p+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(p^2-p\sqrt{2}+1\right)\left(p^2+p\sqrt{2}+1\right).$$

Отсюда имеем

$$y_{\text{общ. однор.}}=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+$$

$$+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

Для нахождения частного решения заметим, что функция $f(x)=5\cos x$ является квазимногочленом, представимом в виде

$$f(x)=e^{0x}\left(5\cos x+0\sin x\right).$$

Этот квазимногочлен соответствует числу $0\pm i$, которое является корнем 0-й кратности для характеристического уравнения; значит, $r=0$.

Тогда частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{частн. неоднор.}}=x^0e^{0x}\left(A\cos x+B\sin x\right)=A\cos x+B\sin x.$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, имеем

$$2A\cos x+2B\sin x=4\cos x+0\sin x,$$

откуда

$$A=2,\ B=0,$$

что дает

$$y_{\text{частн. неоднор.}}=2\cos x.$$

Итак, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{\text{общ. неоднор.}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) +$$

$$+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + 2\cos x.$$

§ 3. Явление резонанса

Исследование ряда различных по природе физических задач приводят к одинаковому по форме дифференциальному уравнению, а именно — к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + 2ky' + \omega^2 y = f(x),$$

где коэффициенты k и ω, а также функция $f(x)$ в разных задачах имеют свой физический смысл.

В качестве иллюстрации рассмотрим колебания груза массы m, подвешенного к одному концу пружины, другой конец которой закреплен. В начальный момент пружина растянута и принимает положение равновесия, при котором вес груза уравновешен растяжением пружины. При отклонении груза на расстояние y от положения равновесия (вверх или вниз) упругая пружина действует на этот груз с т. н. ***упругой силой***, пропорциональной смещению y и направленной к положению равновесия:

$$F_{\text{упр}} = -\omega^2 y.$$

Кроме того, имеется ***сила сопротивления среды***, которая пропорциональна скорости движения груза и направлена в противоположную сторону:

$$F_{\text{сопр}} = -2k\frac{dy}{dt}.$$

Наконец, к нижнему концу пружины может быть приложена постоянно действующая ***вынуждающая сила*** $f(t)$.

Тогда, по второму закону Ньютона имеем:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = f(t) - \omega^2 y - 2k\frac{dy}{dt},$$

или, полагая $m = 1$,

$$y'' + 2ky' + \omega^2 y = f(t).$$

Здесь коэффициент k называется ***сопротивлением среды***, а ω^2 — ***характеристика упругой силы***.

Займемся решением этого уравнения. Сначала, воспользовавшись теоремой 1, решим однородное уравнение

$$y'' + 2ky' + \omega^2 y = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0,$$

следовательно, его корни выражаются формулами

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}.$$

Возможны следующие случаи.

1. $\omega < k$. При этом корни действительные, различные и отрицательные:

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

2. $\omega = k$. В этом случае имеем два отрицательных совпадающих корня

$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

и общее решение имеет вид

$$y(t)=e^{\lambda_1 t}\left(C_1+C_2 t\right)\xrightarrow[t\to\infty]{}0.$$

3. $\omega > k$. Имеем два комплексно-сопряженных корня

$$\lambda_{1,2}=-k\pm i\sqrt{\omega^2-k^2}$$

и общее решение имеет вид

$$y(t)=e^{-kt}\left(C_1\cos\sqrt{\omega^2-k^2}\,t+C_2\sin\sqrt{\omega^2-k^2}\,t\right)=$$

$$=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\,e^{-kt}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos\sqrt{\omega^2-k^2}\,t+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin\sqrt{\omega^2-k^2}\,t\right)=$$

$$=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\,e^{-kt}\sin\left(\sqrt{\omega^2-k^2}\,t+\varphi_0\right)=A(t)\sin\left(\sqrt{\omega^2-k^2}\,t+\varphi_0\right),$$

где φ_0 — т. н. ***сдвиг по фазе***, такой, что

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{C_1}{C_2},$$

а ***амплитуда колебаний***

$$A(t)=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\,e^{-kt}.$$

Итак, мы получили, что если $k\neq 0$, то амплитуда $A(t)$ стремится к нулю и имеем затухающие колебания. Если же $k=0$, то амплитуда $A(t)$ постоянна и имеем гармонические колебания.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение, когда имеется вынуждающая сила $f(t)$. Интересно рассмотреть случай, когда $f(t)$ — периодическая сила:

$$f(t)=p\sin\omega_1 t.$$

В зависимости от соотношений между параметрами ω, ω_1 и k, может наблюдаться т. н. ***явление резонанса***, состоящее в возникновении колебаний с неограниченно увеличивающейся амплитудой.

Будем полагать, что

$$\omega^2 > k^2.$$

Тогда, согласно теореме 2, частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + 2ky' + \omega^2 y = p\sin\omega_1 t$$

имеет вид

$$I(t) = a\cos\omega_1 t + b\sin\omega_1 t$$

(проверьте самостоятельно!).

Подставим эту функцию в неоднородное уравнение и потребуем, чтобы получилось тождество:

$$\left(\omega^2 a + 2kb\omega_1 - a\omega_1^2\right)\cos\omega_1 t + \left(\omega^2 b - 2ka\omega_1 - b\omega_1^2\right)\sin\omega_1 t = p\sin\omega_1 t.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, имеем:

$$\begin{cases} \omega^2 a + 2kb\omega_1 - a\omega_1^2 = 0, \\ \omega^2 b - 2ka\omega_1 - b\omega_1^2 = p, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \omega_1^2\right)a + 2k\omega_1 b = 0, \\ \left(-2k\omega_1\right)a + \left(\omega^2 - \omega_1^2\right)b = p. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\det = \left(\omega^2 - \omega_1^2\right)^2 + \left(2k\omega_1\right)^2 \neq 0,$$

если $k \neq 0$, как и бывает на практике. Значит, система имеет единственное решение:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2k\omega_1 \\ p & \omega^2 - \omega_1^2 \end{vmatrix}}{\det} = -\frac{2kp\omega_1}{\det}.$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}\omega^2-\omega_1^2 & 0\\ -2k\omega_1 & p\end{vmatrix}}{\det}=\frac{p\left(\omega^2-\omega_1^2\right)}{\det}.$$

Тогда

$$I(t)=-\frac{2kp\omega_1}{\det}\cos\omega_1 t+\frac{p\left(\omega^2-\omega_1^2\right)}{\det}\sin\omega_1 t=$$

$$=\frac{p}{\det}\left(-2k\omega_1\cos\omega_1 t+\left(\omega^2-\omega_1^2\right)\sin\omega_1 t\right)=$$

$$=\frac{p}{\det}\left(\alpha_1\cos\omega_1 t+\alpha_2\sin\omega_1 t\right)=$$

$$=\frac{p}{\det}\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\cos\omega_1 t+\frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\sin\omega_1 t\right)=$$

$$=\frac{p}{\sqrt{\det}}\sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right),$$

где

$$\alpha_1=-2k\omega_1,\quad \alpha_2=\omega^2-\omega_1^2,$$

а

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Итак, общее решение неоднородного уравнения в рассматриваемом случае имеет вид

$$y(t)=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\,e^{-kt}\sin\left(\sqrt{\omega^2-k^2}\,t+\varphi_0\right)+\frac{p}{\sqrt{\det}}\sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right).$$

Первое слагаемое, очевидно, стремится к нулю при $t\to\infty$, так что поведение системы при больших t описывается найденным частным решением. При этом устанавливаются гармонические колебания с частотой вынуждающей силы ω_1, сдвигом по фазе φ_1 и амплитудой $\frac{p}{\sqrt{\det}}$.

Рассмотрим поведение амплитуды колебаний

$$A_2(\omega_1)=\frac{p}{\sqrt{\det}}=\frac{p}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_1^2\right)^2+\left(2k\omega_1\right)^2}},$$

считая, что ω и k — постоянные характеристики системы. Очевидно, что при разных значениях частоты ω_1 амплитуда будет различна. Рассмотрим $A_2(\omega_1)$ как функцию от ω_1 и найдем ее максимум — для этого достаточно найти минимум подкоренного выражения

$$f(\omega_1)=\left(\omega^2-\omega_1^2\right)^2+\left(2k\omega_1\right)^2.$$

Имеем:

$$f'(\omega_1)=2\left(\omega^2-\omega_1^2\right)\left(-2\omega_1\right)+8k^2\omega_1=0,$$

откуда

$$\omega_1^*=\sqrt{\omega^2-2k^2}$$

— т. н. ***резонансная частота*** (проверьте самостоятельно!, что это точка минимума для функции $f(\omega_1)$).

Тогда максимальная амплитуда равна

$$A_{2\,\max}=\frac{p}{\sqrt{\left(\omega^2-\left(\omega^2-2k^2\right)\right)^2+4k^2\left(\omega^2-2k^2\right)}}=\frac{p}{2k\sqrt{\omega^2-k^2}}$$

— т. н. ***резонансная амплитуда***.

Заметим, что если $\omega\approx k$, то амплитуда колебаний будет стремиться к бесконечности за счет второго множителя в знаменателе.

С другой стороны, если k мало, то резонансная амплитуда может стать сколь угодно большой уже за счет первого множителя в знаменателе. При этом $\omega_1^*\approx\omega$, т. е. *резонансная частота примерно совпадает с собственной частотой колебаний системы.*

§ 4. Метод Эйлера

Разбирая различные случаи решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами, получим следующий алгоритм нахождения общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка, который называется ***методом Эйлера***.

Будем искать частное решение дифференциального уравнения (2) в виде

$$y = e^{\lambda t},$$

где λ – некоторое постоянное число (вещественное или комплексное).

Подставляя эту функцию в дифференциальное уравнение, получаем

$$\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\right)e^{\lambda t} = 0.$$

Отсюда следует, что число λ должно удовлетворять характеристическому уравнению

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Его решения называются ***характеристическими числами*** дифференциального уравнения.

Возможны три случая.

1. *Все характеристические числа различны и вещественны.*

Обозначим характеристические числа через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда им будут соответствовать n линейно независимых частных решений

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ \dots,\ e^{\lambda_n t},$$

а общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}.$$

2. *Все характеристические числа различны, но среди них имеются комплексно-сопряженные.*

Пусть

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$$

— комплексно-сопряженные характеристические числа. Им будут соответствовать два линейно независимых частных решения:

$$e^{\alpha t}\cos\omega t \text{ и } e^{\alpha t}\sin\omega t.$$

Если эти числа — чисто мнимые, т. е.

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega,$$

то соответствующими линейно независимыми частными решениями будут

$$\cos\omega t \text{ и } \sin\omega t.$$

Составив указанным образом линейно независимые частные решения, соответствующие другим парам комплексно-сопряженных характеристических чисел, а также вещественным характеристическим числам, получим фундаментальную систему решений. Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение дифференциального уравнения. При этом числам $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ в формуле общего решения соответствует выражение

$$e^{\alpha t}\left(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\right),$$

а чисто мнимым числам $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ отвечает сумма

$$C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t.$$

3. *Среди характеристических чисел имеются кратные.*

Пусть λ_1 — вещественное характеристическое число кратности k. Ему будут соответствовать k линейно независимых частных решений:

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ \ldots,\ t^{k-1}e^{\lambda_1 t},$$

а в общем решении — выражение

$$e^{\lambda_1 t}\left(C_1 + C_2 t + \cdots + C_k t^{k-1}\right).$$

Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ — комплексно-сопряженные характеристические числа кратности k, то им соответствуют $2k$ линейно независимых частных решений

$$e^{\alpha t}\cos\omega t,\ te^{\alpha t}\cos\omega t,\ \ldots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\omega t,$$

$$e^{\alpha t}\sin\omega t,\ te^{\alpha t}\sin\omega t,\ \ldots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\omega t,$$

а в общем решении этим числам соответствует выражение

$$e^{\alpha t}\left(\left(C_1 + C_2 t + \cdots + C_k t^{k-1}\right)\cos\omega t + \left(C_{k+1} + C_{k+2} t + \cdots + C_{2k} t^{k-1}\right)\sin\omega t\right).$$

Паре чисто мнимых комплексно-сопряженных характеристических чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ кратности k в общем решении отвечает сумма

$$\left(C_1 + C_2 t + \cdots + C_k t^{k-1}\right)\cos\omega t + \left(C_{k+1} + C_{k+2} t + \cdots + C_{2k} t^{k-1}\right)\sin\omega t.$$

Составив линейно независимые частные решения указанного выше вида, соответствующие всем простым и кратным характеристическим числам, а также парам комплексно-сопряженных характеристических чисел, получим фундаментальную систему решений. Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение дифференциального уравнения.

Рассмотрим метод Эйлера интегрирования системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases} \qquad (6)$$

Решение системы (6) будем искать в виде

$$x_1 = \gamma_1 e^{\lambda t},\ x_2 = \gamma_2 e^{\lambda t},\ \ldots,\ x_n = \gamma_n e^{\lambda t}, \tag{7}$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и λ — постоянные числа.

Подставляя (7) в (6) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получаем однородную линейную систему уравнений для определения $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda)\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)\gamma_n = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Чтобы эта система имела *ненулевое* решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю, т. е., чтобы λ было корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) называется ***характеристическим уравнением***, а его корни — ***характеристическими числами*** системы (6).

Каждому из корней характеристического уравнения соответствует хотя бы одно частное решение вида (7). Возможны три случая.

1. *Все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения различны и действительны.*

В этом случае, полагая в системе (8) $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, получаем систему

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda_i)\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda_i)\gamma_n = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем ненулевое решение

$$\gamma_1 = \gamma_{i1},\ \gamma_2 = \gamma_{i2},\ \ldots,\ \gamma_n = \gamma_{in}.$$

Подстановка этих значений $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и $\lambda = \lambda_i$ в формулу (7) дает решение системы (6), соответствующее корню λ_i:

$$x_{i1} = \gamma_{i1} e^{\lambda_i t},\ x_{i2} = \gamma_{i2} e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ x_{in} = \gamma_{in} e^{\lambda_i t}.$$

Построив решения, соответствующие всем корням $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, получим фундаментальную систему решений для системы (6).

2. *Корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексно-сопряженные.*

Укажем вид частного решения, соответствующего паре комплексно-сопряженных корней $a \pm bi$. Построив решение вида (7), соответствующее корню $a + bi$, и отделив в нем действительную и мнимую части, получим два действительных линейно независимых частных решения системы (6). Решения, соответствующие корню $a - bi$, будут линейно зависимы с решениями, соответствующими корню $a + bi$.

Построив частные решения, соответствующие всем парам комплексно-сопряженных корней, и всем действительным корням и взяв линейную комбинацию всех построенных линейно независимых частных решений с произвольными коэффициентами, получим общее решение системы (6).

3. *Среди корней характеристического уравнения имеются кратные.*

Корню λ_i кратности k соответствует решение системы (6) вида

$$x_1 = P_1(x) e^{\lambda_i x},\ x_2 = P_2(x) e^{\lambda_i x},\ \ldots,\ x_n = P_n(x) e^{\lambda_i x},$$

где $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ — многочлены степени не выше $k-1$, причем среди коэффициентов всех этих многочленов k коэффициентов являются произвольными, а остальные выражаются через них.

Полагая поочередно один из этих произвольных коэффициентов равным единице, а остальные равными нулю, построим k линейно независимых частных решений.

Если $\lambda_{i,j} = a \pm bi$ — комплексно-сопряженные корни кратности k, то, найдя вышеуказанным методом k линейно независимых

комплексных частных решений, соответствующих корню $a+bi$, и отделив в них действительные и мнимые части, получим $2k$ линейно независимых действительных частных решений. Решения, соответствующие корню $a-bi$, будут линейно зависимы с решениями, соответствующими корню $a+bi$.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y-2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y+4z. \end{cases}$$

методом Эйлера и найти ее частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = -1, \quad z(0) = 2.$$

Решение. Будем искать частное решение системы в виде

$$y = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad z = \gamma_2 e^{\lambda x}.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два различных действительных корня

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Построим частное решение, соответствующее корню λ_1. Числа γ_1 и γ_2 ищем из системы

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

так что одно из чисел γ_1, γ_2 можно выбирать произвольно. Положив $\gamma_1 = 1$, получим $\gamma_2 = -1$ и характеристическому числу $\lambda_1 = 1$ будет соответствовать частное решение

$$y_1 = e^x, \quad z_1 = -e^x.$$

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2 = 2$:

$$y_2 = 2e^{2x}, \quad z_2 = -3e^{2x}.$$

Таким образом, общим решением системы будет

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}, \\ z = -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}. \end{cases}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Полагая в найденных соотношениях

$$x = 0, \quad y = -1, \quad z = 2,$$

имеем

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 = -1, \\ -C_1 - 3C_2 = 2, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = 1, \quad C_2 = -1.$$

Поэтому искомым решением будет

$$\begin{cases} y = e^x - 2e^{2x}, \\ z = -e^x + 3e^{2x}. \end{cases}$$

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Оно имеет корни

$$\lambda_1 = 2 + i, \ \lambda_2 = 2 - i.$$

Построим комплексное решение вида

$$y = \gamma_1 e^{(2+i)x}, \ z = \gamma_2 e^{(2+i)x},$$

соответствующее характеристическому числу $\lambda_1 = 2 + i$. Числа γ_1 и γ_2 определяем из системы

$$\begin{cases} -i\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению

$$-i\gamma_1 - \gamma_2 = 0.$$

Полагая $\gamma_1 = 1$, находим $\gamma_2 = -i$, так что

$$\begin{cases} y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i \sin x), \\ z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i \cos x). \end{cases}$$

Отделяя вещественные и мнимые части, получаем два вещественных линейно независимых частных решения

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}\cos x, \\ z_1 = e^{2x}\sin x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = e^{2x}\sin x, \\ z_2 = -e^{2x}\cos x. \end{cases}$$

Общим решением системы будет

$$\begin{cases} y = e^{2x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right), \\ z = e^{2x}\left(C_1\sin x - C_2\cos x\right). \end{cases}$$

§ 5. Метод Даламбера

Для интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами существует метод, предложенный Даламбером.

Рассмотрим его на примере системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + f_1(x), \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + f_2(x). \end{cases} \tag{10}$$

Умножив второе уравнение системы (10) на некоторое число k и сложив почленно с первым уравнением, получим

$$\frac{d(y+kz)}{dx} = (a_{11}+ka_{21})y + (a_{12}+ka_{22})z + f_1(x) + kf_2(x). \tag{11}$$

Выберем число k так, чтобы правая часть уравнения (11) стала линейной функцией от $y+kz$. С этой целью перепишем уравнение (11) в виде

$$\frac{d(y+kz)}{dx} = (a_{11}+ka_{21})\left(y + \frac{a_{12}+ka_{22}}{a_{11}+ka_{21}}z\right) + f_1(x) + kf_2(x).$$

Положив

$$\frac{a_{12}+ka_{22}}{a_{11}+ka_{21}}=k, \tag{12}$$

получим

$$\frac{d(y+kz)}{dx}=(a_{11}+ka_{21})(y+kz)+f_1(x)+kf_2(x).$$

Интегрируя это линейное (относительно $y+kz$) уравнение, имеем

$$y+kz=e^{(a_{11}+ka_{21})x}\left(C+\int\left(f_1(x)+kf_2(x)\right)e^{-(a_{11}+ka_{21})x}dx\right). \tag{13}$$

Если уравнение (12) имеет различные вещественные корни k_1 и k_2, то из (13) получим два первых интеграла системы (10), и интегрирование этой системы будет окончено.

Метод Даламбера распространяется и на линейные системы с постоянными коэффициентами, содержащие производные выше первого порядка.

Математика является самой древней из всех наук, вместе с тем она остается вечно молодой.

Мстислав Келдыш

Глава 6
Матричный метод интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений

Некоторые сведения из теории матриц. Матрицант. Применение теории матриц для решения однородных и неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.

§ 1. Некоторые сведения из теории матриц

Рассмотрим однородную линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n, \end{cases}$$

коэффициенты которой непрерывны в интервале $(a,\ b)$ и пусть

$$x_{i1},\ x_{i2},\ \ldots,\ x_{in},\quad i = 1,\ \ldots,\ n$$

ее фундаментальная система решений.

Введем в рассмотрение две матрицы:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда эту систему можно переписать в виде одного ***матричного уравнения***:

$$\frac{dX}{dt}=AX$$

(проверьте самостоятельно!).

Пусть $F(t)=(f_{jk}(t))$ — квадратная матрица n-го порядка, элементы которой — функции, дифференцируемые на некотором интервале (a, b). Тогда под ***производной*** матрицы $F(t)$ будем понимать матрицу

$$F'(t)=\frac{dF(t)}{dt}=(f'_{jk}(t)).$$

Теорема 1.

1. *Если* $C=\text{const}$, *то* $C'=0$.
2. $(F(t)+G(t))'=F'(t)+G'(t)$.
3. $(F(t)\,G(t))'=F'(t)\,G(t)+F(t)\,G'(t)$.
4. *Если* $C=\text{const}$, *то* $(CF(t))'=CF'(t)$, $(F(t)\,C)'=F'(t)\,C$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 очевидны; докажем утверждение 3.

Пусть

$$F(t)=(f_{jk}(t)),\quad G(t)=(g_{jk}(t));$$

тогда, если

$$P(t)=F(t)\,G(t),\quad P(t)=(p_{jk}(t)),$$

то

$$p_{jk}(t)=\sum_{s=1}^{n} f_{js}(t)\, g_{sk}(t),$$

откуда

$$p'_{jk}(t)=\left(\sum_{s=1}^{n} f_{js}(t)\, g_{sk}(t)\right)' = \sum_{s=1}^{n}\left(f_{js}(t)\, g_{sk}(t)\right)' =$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left(f'_{js}(t)\, g_{sk}(t)+f_{js}(t)\, g'_{sk}(t)\right)=\sum_{s=1}^{n} f'_{js}(t)\, g_{sk}(t)+\sum_{s=1}^{n} f_{js}(t)\, g'_{sk}(t).$$

Первое слагаемое здесь — элемент матрицы $F'(t)G(t)$, а второе — матрицы $F(t)G'(t)$, откуда и вытекает соотношение 3.

Свойство 4 вытекает из свойств 1 и 3. **Теорема доказана.**

Замечание. Если $F(t)$ — обратимая матрица, т. е. существует матрица

$$G(t)=F^{-1}(t),$$

то

$$F(t)G(t)=F(t)\,F^{-1}(t)=0.$$

Дифференцируя это равенство по t, получаем

$$F'(t)F^{-1}(t)+F(t)\left(F^{-1}(t)\right)'=0,$$

откуда

$$\left(F^{-1}(t)\right)'=-F^{-1}(t)F'(t)F^{-1}(t).$$

Если элементы матрицы $F(t)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то можно определить ***интеграл*** этой матрицы по отрезку $[t_0,\, t]\subset[a,\, b]$:

$$\int_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau=\left(\int_{t_0}^{t} f_{jk}(\tau)\,d\tau\right).$$

Теорема 2.

1. *Если* $F(t)=\Phi'(t)$, *то*

$$\int_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau = \Phi(t)-\Phi(t_0).$$

2. *Если C — постоянная матрица, то*

$$\int_{t_0}^{t} CF(\tau)\,d\tau = C\int_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau,$$

и

$$\int_{t_0}^{t} F(\tau)C\,d\tau = C\int_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau.$$

3.

$$\int_{t_0}^{t} \big(F(\tau)+G(\tau)\big)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} G(\tau)\,d\tau.$$

4. *Если матрицы* $F(t)$ *и* $G(t)$ *непрерывны на отрезке* $[t_0,\ t]$, *то*

$$\int_{t_0}^{t} F(\tau)\,G'(\tau)\,d\tau = F(\tau)\,G(\tau)\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\,G(\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. Первые три свойства очевидны; докажем свойство 4.

Так как

$$\big(F(t)G(t)\big)' = F'(t)G(t)+F(t)G'(t),$$

то, интегрируя это равенство по $[t_0,t]$, имеем:

$$F(\tau)\,G(\tau)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} F'(\tau)\,G(\tau)\,d\tau - \int_{t_0}^{t} F(\tau)\,G'(\tau)\,d\tau,$$

откуда и следует искомое соотношение. **Теорема доказана.**

§ 2. Матрицант

Обозначим через $|F(t)|$ матрицу, элементы которой равны абсолютным величинам матрицы $F(t)$:

$$|F(t)| = \big(|f_{jk}(t)|\big).$$

Пусть дана матрица $A(t)$, интегрируемая на отрезке $[a,b]$:

$$A(t)=(a_{ij}(t)).$$

Рассмотрим последовательность матриц

$$\{A_k(t)\},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

определенную рекуррентным образом:

$$A_0(t)=E, \tag{1}$$

$$A_k(t)=E+\int_{t_0}^{t} A(\tau)A_{k-1}(\tau)\,d\tau,\quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{2}$$

где E — единичная матрица.

Пусть

$$g(t)=\max_{a\le t\le b,\ i,j=1,\ \ldots,\ n}|a_{ij}(t)|$$

и

$$h(t)=\int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau.$$

Из интегрируемости матрицы $A(t)$ на отрезке $[a,b]$ следует ограниченность ее элементов на этом отрезке. Следовательно, функция $h(t)$ на этом отрезке равномерно ограничена: существует число h_0, такое, что

$$h(t)\le h_0$$

для всех $t\in[a,b]$.

Теорема 3. *Элементы матрицы*

$$A_k(t)-A_{k-1}(t)=(\tilde{a}_{ij}^{k}(t)),\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

удовлетворяют неравенству

$$|\tilde{a}_{ij}^{k}(t)|\le\frac{n^{k-1}h^{k}(t)}{k!}. \tag{3}$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по k. При $k=1$ имеем:

$$\left|A_1(t)-A_0(t)\right|=\left|\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau\right|=\left(\left|\int_{t_0}^{t}a_{ij}(\tau)\,d\tau\right|\right)\le h(t)I,$$

где I — матрица, все элементы которой равны 1.

Допустим, что неравенство (3) верно при некотором k. Тогда, для $k+1$, имеем:

$$\left|A_{k+1}(t)-A_k(t)\right|=\left(\left|\tilde{a}_{ij}^{k+1}(t)\right|\right)=\left|\int_{t_0}^{t}A(\tau)\left(A_k(\tau)-A_{k-1}(\tau)\right)d\tau\right|=$$

$$=\left(\left|\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{n}a_{is}(\tau)\,\tilde{a}_{sj}^{k}(\tau)\,d\tau\right|\right)=\left(\left|\sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t}a_{is}(\tau)\,\tilde{a}_{sj}^{k}(\tau)\,d\tau\right|\right)\le$$

$$\le\left(\sum_{s=1}^{n}\left|\int_{t_0}^{t}a_{is}(\tau)\,\tilde{a}_{sj}^{k}(\tau)\,d\tau\right|\right)\le\left(\sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\left|a_{is}(\tau)\right|\left|\tilde{a}_{sj}^{k}(\tau)\right|d\tau\right)\le$$

$$\le\left(\sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\frac{n^{k-1}h^k(\tau)}{k!}g(\tau)\,d\tau\right)=\left(\sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\frac{n^{k-1}h^k(\tau)}{k!}dh(\tau)\right)=\frac{n^k h^{k+1}(t)}{(k+1)!}I.$$

Полученное неравенство означает сходимость каждого из n^2 скалярных рядов, получающихся из матричного ряда

$$E+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}A(\tau_1)\,d\tau_1\int_{t_0}^{\tau_1}A(\tau_2)\,d\tau_2+\cdots,$$

поскольку каждый из этих рядов мажорируется сходящимся рядом

$$1+nh_0+\cdots+\frac{n^k h_0^k}{k!}+\cdots=e^{nh_0}.$$

Теорема доказана.

Обозначим через $X(t,\,t_0)$ матрицу

$$X(t,\,t_0)=E+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}A(\tau_1)\,d\tau_1\int_{t_0}^{\tau_1}A(\tau_2)\,d\tau_2+\cdots$$

При формальном дифференцировании имеем:

$$\frac{d}{dt}X(t,\ t_0)=A(t)\left(E+\int_{t_0}^{t}A(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}A(\tau_1)\,d\tau_1\int_{t_0}^{\tau_1}A(\tau_2)\,d\tau_2+\cdots\right).$$

Рассуждениями, аналогичными вышеприведенным, получаем, что каждый член получившихся при этом скалярных рядов является равномерно сходящимся рядом. Поэтому, на основании теорем о почленном дифференцировании функциональных рядов, имеем

$$\frac{d}{dt}X(t,\ t_0)=A(t)X(t,\ t_0).$$

Итак, построенная матрица $X(t,\ t_0)$ является решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt}=A(t)\,X \tag{4}$$

с начальным условием

$$X(t_0)=E.$$

При этом найденное решение определено во всей области, где элементы матрицы $A(t)$ являются интегрируемыми функциями.

Матрица $X(t,\ t_0)$ называется ***матрицантом*** матричного дифференциального уравнения (4). Заметим, что

$$X(t_0,\ t_0)=E.$$

Теорема 4.

$$\det X(t,\ t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{Sp}A(\tau)\,d\tau},$$

где $\operatorname{Sp}A(t)$ *— так называемый* ***след матрицы*** $A(t)$*, определяемый формулой:*

$$\operatorname{Sp}A(t)=a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t).$$

Доказательство. Пусть

$$X(t, t_0) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения:

$$W(t) = \det X(t, t_0)$$

и

$$\delta_j^s = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = s, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq s. \end{cases}$$

Тогда из (4) имеем

$$x'_{jk}(t) = \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)\, x_{sk}(t), \quad j, k = 1, \ldots, n,$$

поэтому

$$W'(t) = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x'_{j1}(t) & \cdots & x'_{jn}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{js}(t) \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{s1}(t) & \cdots & x_{sn}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)\, \delta_j^s W(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t)\, W(t) = \operatorname{Sp} A(t)\, W(t).$$

Таким образом,

$$\frac{dW(t)}{dt} = \operatorname{Sp} A(t)\, W(t).$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение и учитывая, что

$$W(t_0) = \det E = 1,$$

получим

$$W(t)=e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)d\tau}.$$

Выведенная формула называется ***формулой Остроградского-Лиувилля***. Из нее следует, что матрицант является невырожденной матрицей при любом t. **Теорема доказана.**

§ 3. Применение теории матриц для интегрирования однородных линейных систем дифференциальных уравнений

Из уравнения (4) следует, что каждый столбец матрицанта является решением следующей линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x. \tag{5}$$

Как указывалось выше, это решение определено в области интегрируемости коэффициентов матрицы $A(t)$.

Из невырожденности матрицанта непосредственно следует:

1. Совокупность из n столбцов матрицанта представляют из себя n линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений (5). Обозначим эти решения через

$$\bar{x}_1(t),\ \bar{x}_2(t),\ \ldots,\ \bar{x}_n(t).$$

2. Решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (5) с начальными условиями

$$x(t_0)=(x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{n0})$$

будет вектор

$$x(t)=X(t,\ t_0)\,x(t_0), \tag{6}$$

где t_0 — любое число из области интегрируемости коэффициентов матрицы $A(t)$, а $(x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{n0})$ — произвольная точка $\mathbf{R}^n$.

Таким образом, для нахождения решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (5) достаточно найти матрицант уравнения (4).

3. Для любых точек t, t_0 и t_1 из области интегрируемости коэффициентов матрицы $A(t)$ имеет место равенство

$$X(t, t_0) = X(t, t_1)\, X(t_1, t_0).$$

Действительно, пусть $x(t)$ — решение задачи Коши с начальными условиями, заданными в точке t_0. Тогда из системы (5) имеем

$$x(t_1) = X(t_1, t_0)\, x(t_0).$$

С другой стороны, с учетом единственности решения задачи Коши, получим

$$x(t) = X(t, t_0)\, x(t_0) = X(t, t_1)\, x(t_1) = X(t, t_1)\, X(t_1, t_0)\, x(t_0),$$

откуда для любого t_1 имеем

$$X(t, t_0) = X(t, t_1)\, X(t_1, t_0).$$

Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши следует, что для системы (5) решение задачи Коши единственно и может быть представлено формулой (6).

Рассмотрим теперь n произвольных решений системы (5)

$$\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_n(t). \qquad (7)$$

Составим из этих векторов матрицу $\tilde{X}(t)$. Очевидно, что

$$\tilde{X}(t) = X(t, t_0)\, \tilde{X}(t_0).$$

Возможны два случая:

1) $\det \tilde{X}(t_0) = 0$;

2) $\det \tilde{X}(t_0) \neq 0$.

В первом случае из того, что

$$\det \tilde{X}(t) = \det X(t, t_0) \det \tilde{X}(t_0),$$

следует, что

$$\det \tilde{X}(t) = 0$$

для любого t и, значит, выбранные решения (7) являются линейно зависимыми функциями.

Во втором случае получаем, что во всех точках области определения рассматриваемого решения

$$\det \tilde{X}(t) \neq 0.$$

При этом система решений (7) системы дифференциальных уравнений (5) называется ее ***фундаментальной системой***.

Знание фундаментальной системы решений системы дифференциальных уравнений (5) позволяет считать задачу интегрирования выполненной, поскольку любое ее решение может быть представлено в виде линейной комбинации компонент фундаментальной системы.

В самом деле, рассмотрим функцию

$$C_1\tilde{x}_1(t) + C_2\tilde{x}_2(t) + \cdots + C_n\tilde{x}_n(t)$$

и попытаемся подобрать коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, чтобы получить некоторое решение $x(t)$ системы (5). Поскольку, как показано выше, каждое решение системы (5) представимо формулой (6), мы приходим к системе

$$X(t, t_0)\, x(t_0) = C_1 X(t, t_0)\, \tilde{x}_1(t_0) + C_2 X(t, t_0)\, \tilde{x}_2(t_0) +$$

$$+ \cdots + C_n X(t, t_0)\, \tilde{x}_n(t_0),$$

откуда, учитывая, что $\det X(t, t_0) \neq 0$, имеем

$$x(t_0) = C_1\tilde{x}_1(t_0) + C_2\tilde{x}_2(t_0) + \cdots + C_n\tilde{x}_n(t_0).$$

Мы получили линейную систему из n уравнений с n неизвестными. Определитель этой системы

$$\det \tilde{X}(t) \neq 0,$$

значит, она имеет единственное решение. Если

$$C_{10},\ C_{20},\ \ldots,\ C_{n0}$$

— решение этой системы, то функция $x(t)$ представима в виде

$$x(t) = C_{10}\tilde{x}_1(t) + C_{20}\tilde{x}_2(t) + \cdots + C_{n0}\tilde{x}_n(t).$$

Функция

$$C_1\tilde{x}_1(t) + C_2\tilde{x}_2(t) + \cdots + C_n\tilde{x}_n(t),$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные, называется ***общим решением*** системы (5).

В связи с вышеизложенным, очевидно, что задача интегрирования системы (5) может пониматься как задача нахождения ее матрицанта, фундаментальной системы или общего решения.

В случае, если

$$A(t) \equiv A = \text{const},$$

для матрицанта получаем выражение

$$X(t,\ t_0) = E + \int_{t_0}^{t} A\,d\tau + \int_{t_0}^{t} A\,d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} A\,d\tau_2 + \cdots =$$

$$= E + A(t - t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n(t-t_0)^n}{n!} + \cdots.$$

Вспоминая, что

$$e^{a(t-t_0)} = 1 + a(t-t_0) + \frac{a^2(t-t_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n(t-t_0)^n}{n!} + \cdots,$$

в случае, когда $A(t) \equiv A$, будем записывать матрицант системы (5) в виде т.н. ***матричной экспоненты***

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

Из (4) имеем:

$$\frac{d}{dt} e^{A(t-t_0)} = Ae^{A(t-t_0)}.$$

Полученную формулу можно рассматривать как формулу дифференцирования матричной экспоненты.

Таким образом, решение задачи Коши в этом случае будет иметь вид

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 .$$

Для нахождения матричной экспоненты применим преобразование Лапласа. Положим

$$t_0 = 0$$

и пусть

$$e^{At} \leftarrow X(p).$$

Тогда, зная, что

$$\frac{d}{dt} e^{At} \leftarrow pX(p) - E ,$$

имеем

$$pX(p) - E = AX(p),$$

откуда

$$X(p) = (pE - A)^{-1} .$$

Если элементы матрицы $pE-A$ обозначить через $a_{ij}(p)$, а алгебраические дополнения этих элементов через $A_{ij}(p)$, будем иметь:

$$(pE-A)^{-1}=\left(a_{ij}(p)\right)^{-1}=\left(\frac{A_{ji}(p)}{\Delta(p)}\right),$$

где

$$\Delta(p)=\det\left(a_{ij}(p)\right).$$

Итак,

$$X(p)=\left(\frac{A_{ji}(p)}{\Delta(p)}\right).$$

Найдя оригинал каждого элемента матрицы $X(p)$, мы получим искомую матричную экспоненту.

§ 4. Применение теории матриц для интегрирования неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений n-го порядка:

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+f(t), \tag{8}$$

где $A(t)$ — квадратная матрица n-го порядка, а $f(t)$ — n-мерная вектор-функция. Будем искать решение системы (8) в виде

$$y(t)=X(t,\ t_0)\,u(t), \tag{9}$$

где $u(t)$ — некоторая n-мерная вектор-функция, а $X(t,\ t_0)$ — матрицант системы (8).

Из (9) вытекает, что

$$y(t_0)=u(t_0).$$

Подставляя (9) в (8), получим

$$\frac{d}{dt}\left(X(t, t_0)u(t)\right) = A(t)X(t, t_0)u(t) + f(t),$$

или

$$\frac{d}{dt}X(t, t_0)u(t) + X(t, t_0)\frac{d}{dt}u(t) = A(t)X(t, t_0)u(t) + f(t),$$

откуда

$$X(t, t_0)\frac{d}{dt}u(t) = f(t).$$

Значит,

$$\frac{d}{dt}u(t) = X^{-1}(t, t_0)f(t),$$

откуда

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau, t_0)f(\tau)\,d\tau + u(t_0) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau, t_0)f(\tau)\,d\tau + y(t_0).$$

Таким образом,

$$y(t) = X(t, t_0)\left(y(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau, t_0)f(\tau)\,d\tau\right) =$$

$$= X(t, t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t, t_0)X^{-1}(\tau, t_0)f(\tau)\,d\tau.$$

Если $A(t) \equiv A = \text{const}$, то, очевидно,

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y(t_0) + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}f(\tau)\,d\tau. \qquad (10)$$

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 5x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 - x_2. \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$pE-A=\begin{pmatrix} p-5 & -2 \\ 4 & p+1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(p)=\det(pE-A)=(p-1)(p-3).$$

Если $X(p)$ — изображение матрицанта e^{At}, то

$$X(p)=(pE-A)^{-1}=\frac{1}{\Delta(p)}\begin{pmatrix} p+1 & -2 \\ 4 & p-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_{11}(p) & X_{12}(p) \\ X_{21}(p) & X_{22}(p) \end{pmatrix}.$$

После вычисления получим

$$X_{11}(p)=\frac{2}{p-3}-\frac{1}{p-1}\to 2e^{3t}-e^{t},$$

$$X_{12}(p)=-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p-3}\to -e^{t}+e^{3t},$$

$$X_{21}(p)=-\frac{2}{p-3}+\frac{2}{p-1}\to -2e^{3t}+2e^{t},$$

$$X_{22}(p)=-\frac{1}{p-3}+\frac{2}{p-1}\to -e^{3t}+2e^{t}.$$

Итак, матрицант системы

$$e^{At}=\begin{pmatrix} 2e^{3t}-e^{t} & e^{3t}-e^{t} \\ 2e^{t}-2e^{3t} & 2e^{t}-e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$x_1(t) = \bar{C}_1\left(2e^{3t} - e^t\right) + \bar{C}_2\left(e^{3t} - e^t\right),$$

$$x_2(t) = \bar{C}_1\left(2e^t - 2e^{3t}\right) + \bar{C}_2\left(2e^t - e^{3t}\right),$$

где $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ — произвольные постоянные.

Обозначив

$$2\bar{C}_1 + \bar{C}_2 = C_1,$$

$$-\bar{C}_1 - \bar{C}_2 = C_2,$$

получим общее решение в виде

$$x_1(t) = C_1e^{3t} + C_2e^t,$$

$$x_2(t) = -C_1e^{3t} - 2C_2e^t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ x_2' = -x_1 + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем матрицант однородной системы

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1, \end{cases}$$

который равен

$$X(t,\ 0) = e^{At} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

(проверьте самостоятельно!).

Отсюда

$$X^{-1}(t,\,0)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

и, согласно формуле (10), имеем:

$$x(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}\cos\tau & -\sin\tau\\ \sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\operatorname{tg}^2\tau-1\\ \operatorname{tg}\tau\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}-\cos\tau\\ \dfrac{\sin^3\tau}{\cos^2\tau}\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t+\dfrac{1}{\cos t}-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1\cos t+C_2\sin t+\operatorname{tg}t\\ -C_1\sin t+C_2\cos t+2\end{pmatrix},$$

следовательно,

$$x_1(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+\operatorname{tg}t,$$

$$x_2(t)=-C_1\sin t+C_2\cos t+2.$$

Жизнь украшается двумя вещами: занятием математикой и ее преподаванием.

Симеон Пуассон

Глава 7
Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с помощью рядов

Интегрирование линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в виде степенного ряда. Интегрирование линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в виде обобщенного степенного ряда. Уравнение Бесселя. Уравнение Лежандра. Задачи для самостоятельного решения.

§ 1. Интегрирование линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в виде степенного ряда

Часто оказывается трудно или даже невозможно проинтегрировать дифференциальное уравнение в элементарных функциях. В этом случае можно попытаться отыскать решение дифференциального уравнения в другом виде, а именно — в виде степенного ряда. Этот способ особенно удобен в применении к линейным дифференциальным уравнениям. Мы проиллюстрируем его на примере линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{2}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если функции $p(x)$ и $q(x)$ представимы в виде степенных рядов*

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

и

$$q(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

сходящихся при $|x|<R$, то уравнение (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (2), представимое в виде степенного ряда

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{3}$$

сходящегося, по крайней мере, в том же интервале $|x|<R$.

Коэффициенты c_k ряда (3) определяются единственным образом, если заданы начальные условия (2). Их можно определить, например, подстановкой ряда (3) в дифференциальное уравнение (1) и приравниванием коэффициенты при одинаковых степенях x. А именно, предположим, что его коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ представимы в виде степенных рядов по целым неотрицательным степеням x, так что дифференциальное уравнение (1) можно переписать в виде

$$y''+\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)y'+\left(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\right)y=0. \tag{4}$$

Согласно (3),

$$y(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} \tag{5}$$

и

$$y(x)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}. \tag{6}$$

Подставив соотношение (3) и полученные выражения (5) и (6) в дифференциальное уравнение (4), получим

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k=0. \tag{7}$$

Перемножая степенные ряды и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях x в левой части соотношения (7), получим следующую совокупность алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2\cdot 1c_2 + a_0c_1 + b_0c_0 = 0 \\ x^1 & 3\cdot 2c_3 + 2a_0c_2 + a_1c_1 + b_0c_1 + b_1c_0 = 0 \\ x^2 & 4\cdot 3c_4 + 3a_0c_3 + 2a_1c_2 + a_2c_1 + b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 0 \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad (8)$$

Заметим, что

$$c_0 = y(0), \quad c_1 = y'(0),$$

т. е. первые два коэффициента ряда (3) представляют собой начальные условия задачи Коши для дифференциального уравнения (1).

Если начальные условия заданы, то первое из совокупности уравнений (8) позволяет определить коэффициент c_2, второе уравнение — коэффициент c_3, третье — c_4 и т. д.

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения (1) поступим следующим образом. Определим по описанной выше схеме два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, удовлетворяющих начальным условиям

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0,$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Практически это означает, что для решения $y_1(x)$ нужно положить

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0,$$

а для решения $y_2(x)$ положить

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1.$$

Тогда, как нетрудно видеть, общее решение дифференциального уравнения (1) представляет собой линейную комбинацию решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$y(x)=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x),$$

а частное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0)=A, \quad y'(0)=B,$$

задается соотношением

$$y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$$

(проверьте самостоятельно!).

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-xy'-2y=0 \tag{9}$$

в виде степенного ряда.

Решение. Будем искать решение $y_1(x)$ в виде степенного ряда

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{10}$$

Тогда

$$y_1'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}, \tag{11}$$

$$y_1''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)kc_k x^{k-2}. \tag{12}$$

Подставляя соотношения (10), (11) и (12) в уравнение (9), получим

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)kc_k x^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k-2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k=0$$

или

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)kc_k x^{k-2}-\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)c_k x^k=0. \qquad (13)$$

Приводя подобные члены и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях x, получим соотношения, из которых найдем коэффициенты c_2, c_3, c_4, ...

Положим

$$y_1(0)=1, \quad y_1'(0)=0.$$

Тогда

$$c_0=1, \quad c_1=0.$$

Приравнивая коэффициенты в (13), имеем

$$\begin{aligned}
&\text{при } x^0: \ 2c_2-2c_0=0, && \text{откуда } c_2=1,\\
&\text{при } x^1: \ 3\cdot 2c_3-3c_1=0, && \text{откуда } c_3=0,\\
&\text{при } x^2: \ 4\cdot 3c_4-4c_2=0, && \text{откуда } c_4=\frac{1}{3},\\
&\text{при } x^3: \ 5\cdot 4c_5-5c_3=0, && \text{откуда } c_5=0,\\
&\text{при } x^4: \ 6\cdot 5c_6-6c_4=0, && \text{откуда } c_6=\frac{1}{3\cdot 5},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$y_1(x)=1+x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{15}x^6+\cdots. \qquad (14)$$

Аналогично, полагая

$$y_2(0)=0, \quad y_2'(0)=1,$$

имеем

$$c_0=0, \quad c_1=1,$$

и приравнивая коэффициенты в (13), имеем

$$\text{при } x^0: \quad 2c_2 = 0\,,\ c_2 = 0,$$

$$\text{при } x^1: \quad 3\cdot 2c_3 - 3c_1 = 0\,, \quad c_3 = \frac{1}{2},$$

$$\text{при } x^2: \quad 4\cdot 3c_4 - 4c_2 = 0\,, \quad c_4 = 0,$$

$$\text{при } x^3: \quad 5\cdot 4c_5 - 5c_3 = 0\,, \quad c_5 = \frac{1}{2\cdot 4},$$

$$\text{при } x^4: \quad 6\cdot 5c_6 - 6c_4 = 0\,, \quad c_6 = 0,$$

$$\text{при } x^5: \quad 7\cdot 6c_7 - 7c_5 = 0, \quad c_7 = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6},$$

. . . . . .

откуда

$$c_{2k} = 0\,, \quad c_{2k+1} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Итак,

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} + \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} = xe^{\frac{x^2}{2}}. \qquad (15)$$

Общее решение дифференциального уравнения (9) имеет вид

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ задаются формулами (14) и (15) соответственно, а α_1 и α_2 — произвольные постоянные.

§ 2. Интегрирование линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в виде обобщенного степенного ряда

Ряд вида

$$x^r\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0, \qquad (16)$$

где r — заданное число, а степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится при $|x| < R$, называется ***обобщенным степенным рядом***. Если r — целое неотрицательное число, то обобщенный степенной ряд (16) обращается в обычный степенной ряд.

Пусть точка $x = 0$ есть ***особая точка*** дифференциального уравнения (1), т. е. хотя бы один из его коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ не представим в виде степенного ряда. Тогда во многих случаях удается найти решение уравнения (1) в виде обобщенного степенного ряда.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если точка $x = 0$ есть особая точка дифференциального уравнения (1), причем его коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ представимы в виде*

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{x}$$

и

$$q(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}{x^2},$$

где ряды в числителях сходятся при $|x| < R$, а коэффициенты a_0, b_0 и b_1 одновременно не обращаются в нуль, то уравнение (1) имеет хотя бы одно решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0, \tag{17}$$

причем входящий в это решение степенной ряд сходится, по крайней мере, в том же интервале $|x| < R$.

Для определения показателя r и коэффициентов c_k нужно подставить ряд (17) в уравнение (1), сократить на x^r и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x^k. При этом число r находится из т.н. ***определяющего уравнения***

$$r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0, \tag{18}$$

где

$$a_0 = \lim_{x \to 0} xp(x) \tag{19}$$

и

$$b_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x). \tag{20}$$

Пусть r_1 и r_2 — корни определяющего уравнения (18). Возможны два случая.

1. Если разность $r_1 - r_2$ не равна целому положительному числу, то можно построить два решения вида (17):

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0$$

и

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k, \quad A_0 \neq 0.$$

2. Если разность $r_1 - r_2$ есть целое положительное число или нуль, то, вообще говоря, можно построить лишь один ряд:

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0,$$

но, наряду с ним, другим решением будет служить функция вида

$$y_2(x) = Ay_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

Решения изложенных специальных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами основываются на принципе интегрирования уравнений с помощью рядов.

§ 3. Уравнение Бесселя

Уравнением Бесселя называется дифференциальное уравнение

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right)y = 0 \tag{15}$$

или

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0,$$

где p — произвольная постоянная.

Первое частное решение уравнения Бесселя (15) будем искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k, \tag{16}$$

откуда

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+p)\, C_k x^{k+p-1}$$

и

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+p)\,(k+p-1)\, C_k x^{k+p-2}.$$

Подставляя найденные выражения для y, y', y'' в уравнение Бесселя (15), получаем:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+p)(k+p-1) x^{k+p-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+p) x^{k+p-1} +$$

$$+ \left(x^2 - p^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p} = 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left((k+p)^2 - p^2\right) C_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+2} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях x, будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&\text{при } x^0: \quad \left(p^2-p^2\right)C_0=0,\\
&\text{при } x^1: \quad \left((1+p)^2-p^2\right)C_1=0,\\
&\text{при } x^2: \quad \left((2+p)^2-p^2\right)C_2+C_0=0,\\
&\text{при } x^3: \quad \left((3+p)^2-p^2\right)C_3+C_1=0,\\
&\text{при } x^4: \quad \left((4+p)^2-p^2\right)C_4+C_2=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\text{при } x^k: \quad \left((k+p)^2-p^2\right)C_k+C_{k-2}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Первое из соотношений (17) удовлетворяется при любом значении коэффициента C_0, из второго соотношения получаем

$$C_1=0;$$

из третьего:

$$C_2=-\frac{C_0}{(2+p)^2-p^2}=-\frac{C_0}{2^2(p+1)};$$

из четвертого:

$$C_3=0;$$

из пятого:

$$C_4=-\frac{C_0}{(4+p)^2-p^2}=\frac{C_0}{2^4(p+1)(p+2)2!}$$

и т. д.

Таким образом, все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю:

$$C_{2k+1} = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

а коэффициенты с четными индексами имеют вид

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k C_0}{2^{2k}(p+1)(p+2)\cdots(p+k)k!}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Для удобства положим, что

$$C_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)},$$

где $\Gamma(\nu)$ — ***гамма-функция Эйлера***. Как известно, для положительных действительных чисел (а также для всех комплексных чисел с положительной вещественной частью) она определяется следующим образом:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1}\, dx.$$

Свойства гамма-функции:

1. $\Gamma(\nu - 1) = \nu\Gamma(\nu)$.

2. $\Gamma(1) = 1$.

Если $k \in \mathbf{N}$, то

3. $\Gamma(\nu + k + 1) = (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)$.

4. $\Gamma(k+1) = k!$

Пользуясь свойствами гамма-функции, преобразуем коэффициенты вида C_{2k}:

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(p+1)(p+2)\cdots(p+k)k2^p\Gamma(p+1)} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}.$$

При этом, частное решение уравнения Бесселя, которое мы будем в дальнейшем обозначать через J_p, принимает вид

$$J_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}. \tag{18}$$

Эта функция называется ***Бесселевой функцией первого рода порядка*** p.

Второе частное решение уравнения Бесселя (15) будем искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x)=x^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}C_k x^k. \tag{19}$$

Заметим, что это решение может быть получено из решения (18) с помощью замены p на $-p$, так как уравнение (1) содержит p в четной степени и не меняется при замене p на $-p$.

Итак,

$$J_{-p}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}. \tag{20}$$

Эта функция называется ***Бесселевой функцией первого рода порядка*** $-p$.

Заметим, что если $p\notin\mathbf{Z}$, то функции $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ линейно независимы (проверьте самостоятельно!). Если же $p=n\in\mathbf{Z}$, то найденные решения окажутся линейно зависимыми, поскольку

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x).$$

Значит, при $p\in\mathbf{Z}$ вместо $J_{-p}(x)$ надо найти другое решение, которое было бы линейно независимо от $J_p(x)$.

Рассмотрим функцию

$$Y_p(x)=\frac{J_p(x)\cos p\pi-J_{-p}(x)}{\sin p\pi}, \tag{21}$$

полагая $p\notin\mathbf{Z}$.

Очевидно, что функция $Y_p(x)$ является решением дифференциального уравнения (1) как линейная комбинация частных решений $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$.

Несложно показать, что, устремляя в (21) p к целому числу, в пределе мы получим функцию, являющуюся решением дифференциального уравнения (1) и линейно независимую от $J_p(x)$. Функция $Y_p(x)$ называется ***Бесселевой функцией второго рода порядка p*** или ***функцией Вебера***.

Таким образом, для любого p построена фундаментальная система решений уравнения Бесселя (15): при $p \notin \mathbf{Z}$ общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$y = \alpha_1 J_p(x) + \alpha_2 Y_p(x),$$

а при $p \notin \mathbf{Z}$ общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$y = \alpha_1 J_p(x) + \alpha_2 J_{-p}(x),$$

где α_1 и α_2 — произвольные постоянные.

Замечание 1. Дифференциальное уравнение

$$x^2 y'' + xy' + \left(k^2 x^2 - p^2\right) y = 0, \tag{22}$$

где k — ненулевая постоянная, приводится к уравнению Бесселя

$$\xi^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \xi \frac{dy}{d\xi} + \left(\xi^2 - p^2\right) y = 0 \tag{23}$$

подстановкой

$$\xi = kx.$$

При $p \notin \mathbf{Z}$ общим решением уравнения (23) служит функция

$$y = \alpha_1 J_p(\xi) + \alpha_2 J_{-p}(\xi),$$

и общее решение дифференциального уравнения (22) имеет вид

$$y = \alpha_1 J_p(kx) + \alpha_2 J_{-p}(kx),$$

а при $p \in \mathbf{Z}$ общим решением уравнения (23) служит функция

$$y = \alpha_1 J_p(\xi) + \alpha_2 Y_p(\xi),$$

и общее решение дифференциального уравнения (22) имеет вид

$$y=\alpha_1 J_p(kx)+\alpha_2 Y_p(kx),$$

где α_1 и α_2 — произвольные постоянные.

Замечание 2. Класс уравнений

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+at\frac{du}{dt}+\left(b+ct^m\right)u=0,$$

где a, b, c и m — постоянные (c и m отличны от нуля), приводится к уравнению Бесселя путем введения нового переменного x и новой функции y по формулам

$$y=t^{\alpha}u,\quad x=\gamma t^{\beta}.$$

§ 4. Уравнение Лежандра

Уравнением Лежандра называется дифференциальное уравнение

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0, \tag{24}$$

где $n\in\mathbf{N}$.

Одним из решений уравнения Лежандра (24) является сходящийся ряд, называемый ***полиномом Лежандра***:

$$P_n(x)=\frac{1}{n!\,2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}C_n^k x^{n-2k}=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n.$$

Фундаментальная система решений уравнения Лежандра имеет вид

$$y_1=P_n(x),$$

$$y_2=Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{x+1}{x-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}P_{k-1}(x)P_{n-1}(x).$$

Функция $Q_n(x)$ называется ***функцией Лежандра второго рода***. Тогда общее решение уравнения Лежандра примет вид:

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Свойства полиномов Лежандра

1. Полином Лежандра удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dP_n(x)}{dx}\right) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

2.

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}\left(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5\right).$$

3.

$$nP_n(x)=(2n-1)xP_{n-1}(x)-(n-1)P_{n-2}(x).$$

4. Многочлен $P_n(x)$ имеет n действительных нулей, расположенных на отрезке $[-1, 1]$, перемежаясь с нулями многочлена $P_{n+1}(x)$.

5.

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases} 0, & \text{при } n\neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{при } n=m. \end{cases}$$

6.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t|<1.$$

Математика – не музыка, красоты которой доступны большому количеству людей. Математические красоты могут быть понятны лишь немногим специалистам.

Л.С. Понтрягин

Глава 8
Элементы теории устойчивости

Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений. Устойчивость линейных однородных систем дифференциальных уравнений. Устойчивость линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Устойчивость систем, близких к линейным. Системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Точки покоя. Простейшие типы точек покоя.

§ 1. Устойчивость решений дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{1}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(x, t) = \begin{pmatrix} f_1(x, t) \\ \vdots \\ f_n(x, t) \end{pmatrix}.$$

Решение $x = \overline{x}(t)$ системы (1), определенное при всех $t \geq 0$, называется ***устойчивым (в смысле Ляпунова)***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, что для всякого решения $x(t)$

этой системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$\left\| x(t_0) - \bar{x}(t_0) \right\| < \delta, \tag{2}$$

при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\left\| x(t) - \bar{x}(t) \right\| < \varepsilon.$$

Решение $x = \bar{x}(t)$ системы (1) называется ***асимптотически устойчивым***, если оно устойчиво и существует такое $\delta_0 > 0$, что для каждого решения $x(t)$ этой же системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$\left\| x(t_0) - \bar{x}(t_0) \right\| < \delta_0$$

справедливо неравенство

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| x(t) - \bar{x}(t) \right\| = 0.$$

Если решение $x = \bar{x}(t)$ не является устойчивым, то будем называть его ***неустойчивым***. Таким образом, для неустойчивости решения $x = \bar{x}(t)$ достаточно, чтобы существовало такое положительное число ε_0, что при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ нашлось хотя бы одно решение $x(t)$ системы (1), удовлетворяющее при $t = t_0$ неравенству (2), для которого при некотором $t_1 > t_0$ выполнялось равенство

$$\left\| x(t_1) - \bar{x}(t_1) \right\| = \varepsilon_0.$$

Если в уравнении (1) сделать замену

$$x = y + \bar{x}(t),$$

то получим, что задача об исследовании устойчивости решения $x = \bar{x}(t)$ сведется к задаче об исследовании устойчивости тождественно нулевого решения

$$y \equiv 0.$$

Пример 1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчиво ли решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}=\frac{a}{t}x,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(1)=0.$$

Решение. Любое решение рассматриваемого дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t)=t^a x_0.$$

Решением, удовлетворяющим заданному начальному условию, будет

$$\bar{x}(t)=0.$$

Тогда

$$\left|x(t)-\bar{x}(t)\right|=\left|x(t)\right|=t^a\left|x_0\right|,$$

откуда имеем следующее:

1. При $a<0$

$$\left|x(t)-\bar{x}(t)\right|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

при любом x_0. Следовательно, решение $\bar{x}(t)$ асимптотически устойчиво.

2. При $a=0$

$$\left|x(t)-\bar{x}(t)\right|=\left|x_0\right|,$$

следовательно, решение $\bar{x}(t)$ устойчиво при $t\to+\infty$.

3. При $a>0$

$$\left|x(t)-\bar{x}(t)\right|\xrightarrow[t\to+\infty]{}\infty$$

при любом x_0, следовательно, решение $\bar{x}(t)$ неустойчиво.

Пример 2. Исследовать на устойчивость при $t \to +\infty$ решение

$$x = \frac{1}{t},\ t \geq 1$$

уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\left(x - \frac{2}{t}\right)^2.$$

Решение. Это уравнение Риккати. Заменой

$$x = \frac{1}{t} + y$$

оно сводится к уравнению Бернулли

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}y - y^2.$$

Исследование устойчивости решения $\overline{x} = \frac{1}{t}$ исходного уравнения сводится к исследованию вопроса устойчивости тривиального решения $\overline{y} = 0$ полученного уравнения Бернулли.

Решая это уравнение при начальном условии

$$y(1) = y_0,$$

находим:

$$y(t) = \frac{3y_0 t^2}{y_0\left(t^3 - 1\right) + 3}.$$

Из полученной формулы вытекает, что тривиальное решение $\overline{y} = 0$ неустойчиво, поскольку каким бы малым по абсолютной величине ни было $y_0 < 0$,

$$y(t) \xrightarrow[t \to t^* - 0]{} -\infty,$$

где

$$t^* = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{y_0}}.$$

Напомним, что в определении устойчивости решения $\overline{x}(t)$ входило требование, чтобы это решение было определено для всех $t \geq t_0$.

§ 2. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{3}$$

где коэффициенты системы и ее свободные члены непрерывны в интервале

$$a < t < +\infty,$$

($a \in \mathbf{R}$ или $a = -\infty$) и пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{4}$$

— однородная система, соответствующая системе (3).

Линейную систему (3) будем называть ***устойчивой***, если все ее решения устойчивы по Ляпунову при $t \to +\infty$.

Линейную систему (3) будем называть ***неустойчивой***, если все ее решения неустойчивы по Ляпунову при $t \to +\infty$.

Как будет показано ниже, решения линейных систем дифференциальных уравнений либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы в отличие от нелинейных систем дифференциальных уравнений, некоторые решения которых могут быть устойчивыми, а другие – неустойчивыми.

Теорема 1. *Для устойчивости системы (3) при любом свободном члене $f(t)$ необходимо и достаточно, чтобы было устойчивым тривиальное решение*

$$x = 0, \quad t_0 < t < +\infty$$

соответствующей ей однородной системы (4).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\eta(t)$, $t_0 \le t < +\infty$ – некоторое устойчивое решение системы (3). Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для любого решения $y(t)$ системы (3) при $t_0 \le t < +\infty$ справедливо неравенство

$$\| y(t) - \eta(t) \| < \varepsilon,$$

если

$$\| y(t_0) - \eta(t_0) \| < \delta.$$

Поскольку функция

$$x(t) = y(t) - \eta(t)$$

является решением однородной системы (4), то эти неравенства означают устойчивость по Ляпунову тривиального решения $x = 0$ однородной системы (4).

Достаточность. Пусть нулевое решение системы (4) устойчиво по Ляпунову. Тогда что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для любого решения $x(t)$ системы (4), удовлетворяющего условию

$$\| x(t_0) \| < \delta,$$

будет выполняться неравенство

$$\| x(t) \| < \varepsilon$$

при $t_0 \le t < +\infty$.

Пусть $\eta(t)$ – некоторое решение системы (3), а $y(t)$ – любое решение системы (3), удовлетворяющее условию

$$\| y(t_0) - \eta(t_0) \| < \delta.$$

Поскольку $y(t) - \eta(t)$ есть решение системы (4), то

$$\| y(t) - \eta(t) \| < \varepsilon$$

при $t_0 \le t < +\infty$, что и означает устойчивость по Ляпунову решения $\eta(t)$ системы (3) при $t \to +\infty$. **Теорема доказана.**

Следствие 1. *Линейная система дифференциальных уравнений (3) устойчива, когда устойчиво хотя бы одно решение этой системы и вполне неустойчива, если неустойчиво некоторое ее решение.*

Доказательство. Действительно, анализ доказательства необходимости условий теоремы 1 показывает, что мы установили устойчивость тривиального решения системы (4), исходя из предположения об устойчивости какого-нибудь решения системы (3) (в доказательстве это было решение $\eta(t)$). Из достаточности условий теоремы 1 следует, что решения системы (4) могут либо все быть устойчивыми, либо все неустойчивыми. **Следствие доказано.**

Следствие 2. *Система линейных неоднородных дифференциальных уравнений (3) устойчива тогда и только тогда, когда устойчива соответствующая ей однородная система уравнений.*

Доказательство. Из следствия 1 вытекает, что однородная система (4) может быть либо устойчивой, либо неустойчивой. Устойчивость или неустойчивость системы (3) зависит от устойчивости или неустойчивости тривиального решения системы (4), что и доказывает следствие 2. **Следствие доказано.**

Система линейных дифференциальных уравнений (3) называется ***асимптотически устойчивой***, если все ее решения асимптотически устойчивы при $t \to +\infty$.

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям в доказательстве теоремы 1, несложно установить справедливость следующих утверждений (проведите доказательство самостоятельно!).

Теорема 2. *Линейная система дифференциальных уравнений (3) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда тривиальное решение соответствующей однородной системы (4) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to +\infty$.*

Следствие. *Для асимптотической устойчивости системы (3) необходимо и достаточно, чтобы была асимптотически устойчива соответствующая ей однородная система (4).*

Пример. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчиво ли решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Решение. Решение данной системы уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям, есть

$$\begin{cases} x(t) \equiv 0, \\ y(t) \equiv 0. \end{cases}$$

Любое решение заданной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \\ y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t. \end{cases}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при

$$|x_0 - 0| < \delta, \quad |y_0 - 0| < \delta,$$

имеют место неравенства

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon,$$

$$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon$$

для всех $t \geq 0$.

Это и будет означать, согласно определению, что нулевое решение

$$\begin{cases} x(t) \equiv 0, \\ y(t) \equiv 0, \end{cases}$$

данной системы устойчиво по Ляпунову.

Имеем, очевидно,

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| \le |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \le |x_0| + |y_0|,$$

$$|x_0 \sin t - y_0 \cos t| \le |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \le |x_0| + |y_0|$$

для всех t.

Поэтому, если

$$|x_0| + |y_0| < \varepsilon,$$

то и подавно

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon,$$

$$|x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon$$

для всех t.

Следовательно, если, например, взять

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2},$$

то при

$$|x_0| < \delta, \quad |y_0| < \delta,$$

указанные выше неравенства будут иметь место для всех $t > 0$.

Таким образом, нулевое решение системы устойчиво по Ляпунову, но эта устойчивость не асимптотическая.

§ 3. Устойчивость линейных однородных систем дифференциальных уравнений

Выше было показано, что устойчивость решений неоднородной линейной системы (3) эквивалентна устойчивости тривиального решения однородной системы (4). Покажем, что устойчивость системы (4) эквивалентна ограниченности ее решений.

Теорема. *Система (4) устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда каждое решение* $x(t)$, $t_0 \le t < +\infty$ *этой системы ограничено на полуоси* $t_0 \le t < +\infty$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система (4) устойчива по Ляпунову. Покажем, что любое ее решение ограничено на полуоси $t_0 \le t < +\infty$.

Пусть, напротив, некоторое ее решение $\bar{x}(t)$ неограничено на $t_0 \le t < +\infty$. Очевидно, что

$$\left\| x(t_0) \right\| \ne 0,$$

поэтому, выбрав произвольное $\delta > 0$, рассмотрим решение

$$x(t) = \frac{\bar{x}(t)}{\left\| \bar{x}(t_0) \right\|} \frac{\delta}{2}.$$

Очевидно, что

$$\left\| \bar{x}(t_0) \right\| < \frac{\delta}{2},$$

но так как, по предположению, решение $x(t)$ неограничено, то наступит такой момент t_1, что $\left\| x(t_1) \right\|$ будет больше любого наперед заданного числа ε, что и означает неустойчивость решения $x(t)$. Мы пришли к противоречию, следовательно, любое решение системы (4) ограничено на полуоси $t_0 \le t < +\infty$.

Достаточность. Пусть любое решение системы (4) ограничено на $t_0 \le t < +\infty$. Покажем, что система (4) устойчива по Ляпунову.

Рассмотрим нормированную фундаментальную матрицу системы (4)

$$X(t) = \left(x_{ik}(t) \right),$$

где

$$X(t_0) = E.$$

Так как элементами матрицы $X(t)$ являются ограниченные функции, то существует число $M > 0$, такое, что

$$\|x(t)\| < M$$

при $t_0 \le t < +\infty$, причем постоянная M зависит, вообще говоря, от момента t_0.

Как известно, каждое решение $x(t)$ системы (4) представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(t_0),$$

откуда

$$\|x(t)\| \le \|X(t)\| \cdot \|x(t_0)\| \le M\|x(t_0)\| < \varepsilon,$$

если только

$$\|x(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta.$$

Но это и означает устойчивость тривиального решения системы (4), а значит, в силу теоремы 1, устойчивость по Ляпунову любого решения системы (4). **Теорема доказана**.

Следствие. *Если неоднородная линейная система (3) устойчива, то все ее решения или ограничены или неограничены.*

Замечание. Для нелинейной системы из ограниченности ее решений, вообще говоря, не следует их устойчивость.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x' = \sin^2 x.$$

Интегрируя, получим

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dx}{\sin^2 x} = dt, \\ \sin x = 0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\operatorname{ctg} x = t - C, \\ x = \pi k, \ k \in \mathbf{Z}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arcctg}(C - t) + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}, \\ x = \pi k, \ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Если $x(t_0) = x_0$, то

$$\left[\begin{array}{l} x(t) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x_0 + t_0 - t) + \pi k \ \text{ при } \ \pi k < x < \pi(k+1), \\ x(t) = \pi k \ \text{ при } \ x_0 = \pi k. \end{array}\right.$$

Все решения задачи, очевидно, ограничены на $(-\infty, +\infty)$. Однако решение $x_0 = 0$ неустойчиво при $t \to +\infty$, так как при любом $x_0 \in (0, \pi)$ имеем

$$\lim_{x \to +\infty} x(t) = \pi.$$

Теорема. *Линейная однородная система дифференциальных уравнений (4) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения стремятся к нулю при $t \to +\infty$, т. е.*

$$\lim_{x \to +\infty} x(t) = 0.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть система (4) асимптотически устойчива при $t \to +\infty$. Следовательно, асимптотически устойчиво и ее нулевое решение. Это означает, что существует такое Δ, что для любого решения $\xi(t)$, такого, что

$$\|\xi(t)\| < \Delta,$$

имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \xi(t) = 0.$$

Пусть $x(t)$ – произвольное решение, определяемое начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \neq 0.$$

Положим

$$x(t) = 2\xi(t)\frac{\|x(t_0)\|}{\Delta},$$

где

$$\xi(t) = \frac{x(t)}{\|x(t_0)\|}\frac{\Delta}{2}.$$

Так как

$$\|\xi(t_0)\| = \frac{\Delta}{2} < \Delta,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty} x(t) = 0.$$

Доказательство достаточности проведите самостоятельно. **Теорема доказана.**

Замечание. Для нелинейной системы дифференциальных уравнений стремление к нулю всех решений, вообще говоря, не является достаточным условием для асимптотической устойчивости.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} - t^2xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y}{t}, \end{cases}$$

имеющую решение

$$x = 0,\ y = 0.$$

Решение. Интегрируя систему, получим

$$\begin{cases} x = C_1 t e^{-C_2^2 t}, \\ y = \dfrac{C_2}{t}. \end{cases}$$

Если положить

$$t_0 = 1,$$

то имеем

$$\begin{cases} x = x(t_0)\, t e^{-y^2(t_0)(t-1)}, \\ y(t) = \dfrac{y(t_0)}{t}. \end{cases}$$

Очевидно,

$$x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

и

$$y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

однако для любого $\delta > 0$ при

$$x(t_0) = \delta^2,\ y(t_0) = \delta$$

имеем

$$x\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) = \delta^2\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) e^{-1} > \frac{1}{e},$$

следовательно, решение

$$x = 0,\ y = 0$$

не является устойчивым, а тем более – асимптотически устойчивым при $t \to +\infty$.

§ 4. Устойчивость линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \text{const}. \tag{5}$$

Из общих теорем устойчивости следует, что устойчивость решений системы (5) эквивалентна их ограниченности. Поскольку любое ее решение представляет собой линейную комбинацию элементов матрицанта системы (5), т.е. матрицы

$$e^{A(t-t_0)},$$

то, полагая для простоты $t_0 = 0$, рассмотрим элементы матрицы e^{At}.

Выше мы установили, что изображением матрицы e^{At} будет матрица

$$\left(\frac{A_{ji}(p)}{\Delta(p)}\right),$$

где $A_{ij}(p)$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}(p)$ матрицы $pE - A$, а

$$\Delta(p) = \det(pE - A).$$

Разлагая многочлен $\Delta(p)$ на множители, получим

$$\Delta(p)=(p-a)^k\cdots\left((p-\alpha)^2+\omega^2\right)^m\cdots,$$

причем

$$\sum k+2\sum m=n.$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть a – корень кратности k. Тогда, если $\bar{k}$ – кратность этого корня как корня многочлена $A_{ij}(p)$, то в элементе x_{ij} матрицы e^{At} имеется слагаемое

$$e^{at}\frac{t^{k-\bar{k}-1}}{(k-\bar{k}-1)!},\ \bar{k}<k.$$

Эта функция будет ограничена при $t\to+\infty$ если либо $a<0$, либо $a=0$ и $k-\bar{k}-1=0$. В последнем случае будем говорить, что корню a соответствуют простые элементарные делители.

2. Пусть $\alpha+i\omega$ – корень кратности m. Тогда, если $\bar{m}$ – кратность этого корня как корня многочлена $A_{ij}(p)$, то в элементе x_{ij} матрицы e^{At} имеется слагаемое

$$e^{\alpha t}\left(P_{m-\bar{m}-1}(t)\cos\omega t+Q_{m-\bar{m}-1}(t)\sin\omega t\right),\ \bar{m}<m,$$

где $P_{m-\bar{m}-1}(t)$ и $Q_{m-\bar{m}-1}(t)$ – многочлены порядка не выше $m-\bar{m}-1$, причем порядок по крайней мере одного из многочленов точно равен $m-\bar{m}-1$.

Очевидно, эта функция будет ограничена при $t\to+\infty$, если либо $\alpha<0$, либо $\alpha=0$ и $m-\bar{m}-1=0$. В последнем случае будем говорить, что корню $\alpha+i\omega$ соответствуют простые элементарные делители.

Собирая воедино полученные результаты, имеем следующие теоремы.

Теорема. *Линейная однородная система (5) с постоянной матрицей A устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения* λ_i *матрицы A имеют неположительные действительные части:*

$$\operatorname{Re}\lambda_i \le 0,$$

причем корни, имеющие нулевые действительные части, имеют лишь простые элементарные делители.

Теорема. *Линейная однородная система (5) с постоянной матрицей A асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения* λ_i *матрицы A имеют отрицательные действительные части:*

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0.$$

§ 5. Устойчивость систем, близких к линейным

Докажем следующую лемму, используемую для дальнейшего изложения материала.

Лемма (Гронуолла–Беллмана). *Пусть функции* $u(t)$ *и* $f(t)$ *непрерывны и неотрицательны при* $t \ge t_0$, *причем имеет место неравенство*

$$u(t) \le a + \int_{t_0}^{t} f(\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \ge t_0, \tag{6}$$

где a – положительная постоянная. Тогда

$$u(t) \le a e^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau}, \quad t \ge t_0.$$

Доказательство. Из неравенства (6) имеем:

$$\frac{u(t)}{a + \int_{t_0}^{t} f(\tau)u(\tau)d\tau} \le 1,$$

так что

$$\frac{f(t)u(t)}{a+\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)u(\tau)d\tau} \le f(t). \tag{7}$$

Так как

$$\frac{d}{dt}\left(a+\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)u(\tau)d\tau\right)=f(t)u(t),$$

то, интегрируя неравенство (7) от t_0 до t, будем иметь

$$u(t)\le a+\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)u(\tau)d\tau \le ae^{\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau}.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть система*

$$\frac{dx}{dt}=Ax, \quad A=\text{const}, \tag{8}$$

устойчива при $t\to+\infty$.

Тогда система

$$\frac{dy}{dt}=\left(A+B(t)\right)y, \tag{9}$$

где матрица $B(t)$ *непрерывна, причем*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\left\|B(t)\right\|dt<\infty,$$

также устойчива при $t\to+\infty$.

Доказательство. Без потери общности рассуждений, будем полагать $t_0 = 0$.

Пусть $X(t)$ – матрицант системы (8). Рассматривая вектор $B(t)y$ как свободный член в уравнении (9) и применяя метод вариации произвольных постоянных, получим, что каждое решение $y(t)$ системы (9) удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = X(t)y(0) + \int_0^t X(t-\tau)B(\tau)y(\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0,$$

откуда

$$\|y(t)\| \leq \|X(t)\|\,\|y(0)\| + \int_0^t \|X(t-\tau)\|\,\|B(\tau)\|\,\|y(\tau)\|\,d\tau.$$

Так как система (8) устойчива, то матрицант $X(t)$ ограничен, т. е. существует число K такое, что

$$\|X(t)\| \leq K, \quad t \geq 0.$$

Таким образом,

$$\|y(t)\| \leq K\|y(0)\| + \int_0^t K\|B(\tau)\|\,\|y(\tau)\|\,d\tau$$

и используя лемму Гронуолла–Беллмана, имеем:

$$\|y(t)\| \leq K\|y(0)\|e^{\int_0^t K\|B(\tau)\|d\tau} \leq K\|y(0)\|e^{\int_0^\infty K\|B(\tau)\|d\tau} < \infty.$$

Следовательно, все решения системы (9) ограничены, что для линейной системы эквивалентно ее устойчивости. **Теорема доказана.**

Теорема. *Если система (8) асимптотически устойчива при $t \to +\infty$, то система (9), в которой матрица $B(t)$ непрерывна и*

$$B(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

также асимптотически устойчива при $t \to +\infty$.

Доказательство. Из асимптотической устойчивости системы (8) следует, что все собственные значения λ_i матрицы A имеют отрицательные действительные части.

Положим

$$\alpha = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i < 0$$

и выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы

$$\alpha + 2\varepsilon < 0. \tag{10}$$

В уравнении (9) сделаем замену переменных:

$$y = e^{At} z.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} = e^{At} \frac{dz}{dt} + Ae^{At} z = \left(A + B(t)\right) e^{At} z$$

и, следовательно,

$$\frac{dz}{dt} = e^{-At} B(t) e^{At} z.$$

Переходя к интегральному уравнению, будем иметь

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} B(\tau) e^{A\tau} z(\tau) d\tau.$$

Так как

$$y(t_0) = e^{At_0} z(t_0),$$

то для решения $y(t)$, $t_0 \le t < +\infty$, получаем интегральное уравнение

$$y(t) = e^{A(t-t_0)} y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B(\tau) y(\tau) d\tau,$$

откуда

$$\|y(t)\| \le \left\| e^{A(t-t_0)} \right\| \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \left\| e^{A(t-\tau)} \right\| \|B(\tau)\| \|y(\tau)\| d\tau.$$

Очевидно, можно считать

$$\left\| e^{At} \right\| \le C e^{(\alpha+\varepsilon)t}, \quad t \ge 0,$$

где $C = C(\varepsilon)$ – некоторая положительная постоянная. Поэтому

$$\|y(t)\| \le C e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)} \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} C e^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)} \|B(\tau)\| \|y(\tau)\| d\tau$$

или

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t} \|y(t)\| \le C e^{-(\alpha+\varepsilon)t_0} \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} C e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau} \|B(\tau)\| \|y(\tau)\| d\tau.$$

Применяя лемму Гронуолла–Беллмана, имеем

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t} \|y(t)\| \le C \|y(t_0)\| e^{-(\alpha+\varepsilon)t_0} e^{\int_{t_0}^{t} C \|B(\tau)\| d\tau},$$

следовательно,

$$\|y(t)\| \le C \|y(t_0)\| e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0) + C\int_{t_0}^{t} \|B(\tau)\| d\tau}. \tag{11}$$

Согласно правилу Лопиталя (в форме Штольца),

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} \|B(\tau)\| d\tau}{t-t_0} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\|B(t)\|}{1} = 0,$$

поэтому

$$\int_{t_0}^{t} \| B(\tau) \| d\tau < \varepsilon(t - t_0), \quad t \geq t_0,$$

так что неравенство (11) принимает вид

$$\| y(t) \| \leq C \| y(t_0) \| e^{(\alpha+2\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0$$

и, значит, в силу (10), для любого решения $y(t)$ системы (9) справедливо равенство

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0,$$

что и означает асимптотическую устойчивость системы (9). **Теорема доказана**.

Замечание (Правило Лопиталя в форме Штольца). Если функции $u(t)$ и $v(t)$ таковы, что существует предел

$$\lim_{t \to a} \frac{u'(t)}{v'(t)}$$

и

$$\lim_{t \to a} v(t) = \pm\infty,$$

где $a \in \overline{\mathbf{R}}$, то

$$\lim_{t \to a} \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{t \to a} \frac{u'(t)}{v'(t)}.$$

Пример. Пусть U – компакт в пространстве $\mathbf{R}^m$, $B_0, \ldots, B_m$ — постоянные квадратные матрицы n-го порядка, $c_0, \ldots, c_m$ — постоянные векторы; $u(t)$ – измеримая на отрезке $[t_0, T]$ вектор-функция, значения которой принадлежат некоторому множеству U:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in U \subset \mathbf{R}^m.$$

Обозначим через $x_u(t)$ решение системы

$$\dot{x} = \left(B_0 + \sum_{j=1}^{m} B_j u_j \right) x + \sum_{j=1}^{m} c_j u_j + c_0$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, соответствующее вектору $u \in U$.

Доказать, что множество $\{x_u(t)\}$ равномерно ограничено на $[t_0, T]$.

Решение. Нетрудно видеть, что существуют такие постоянные числа A и B, что

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} c_j u_j + c_0 \right\| < A, \quad \left\| B_0 + \sum_{j=1}^{m} B_j u_j \right\| < B.$$

Тогда

$$\|\dot{x}\| = \left\| \left(B_0 + \sum_{j=1}^{m} B_j u_j \right) x + \sum_{j=1}^{m} c_j u_j + c_0 \right\| \le A\|x\| + B,$$

откуда

$$\|x(t)\| \le \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \left(A\|x(s)\| + B \right) ds$$

или

$$\|x(t)\| + \frac{B}{A} \le \left(\|x(t_0)\| + \frac{B}{A} \right) + \int_{t_0}^{t} A \left(\|x(s)\| + \frac{B}{A} \right) ds.$$

По лемме Гронуолла–Беллмана имеем

$$\|x(t)\| + \frac{B}{A} \le \left(\|x(t_0)\| + \frac{B}{A} \right) e^{A(t-t_0)} \le \left(\|x(t_0)\| + \frac{B}{A} \right) e^{A(T-t_0)},$$

что и означает равномерную ограниченность решений данной системы.

§ 6. Системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{12}$$

с непрерывной матрицей $A(t)$ периода T:

$$A(t+T) = A(t).$$

Теорема (Флоке). *Матрицант линейной системы (12) с T-периодической матрицей имеет вид*

$$X(t) = \Phi(t)e^{\Psi t},$$

где $\Phi(t)$ – кусочно-гладкая T-периодическая неособенная матрица, причем

$$\Phi(0) = E,$$

а Ψ – постоянная матрица.

Доказательство. Если $X(t)$ – матрицант системы (12), то

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X. \tag{13}$$

Так как

$$A(t+T) = A(t),$$

то матрица $X(t+T)$ также удовлетворяет уравнению (13), значит

$$X(t+T) = X(t)C,$$

где C – постоянная неособенная матрица.

Из условия

$$X(0)=E$$

имеем

$$C=X(t).$$

Таким образом,

$$X(t+T)=X(t)X(T),$$

причем, очевидно,

$$\det X(t)\neq 0.$$

Определим матрицу Δ такую, что

$$e^{\Psi T}=X(T)$$

(можно показать, что эта задача разрешима), и рассмотрим матрицу

$$\Phi(t)=X(t)e^{-\Psi t}.$$

Имеем:

$$\Phi(t+T)=X(t+T)e^{-\Psi(t+T)}=X(t)X(T)e^{-\Psi(t+T)}=$$

$$=X(t)e^{\Psi T}e^{-\Psi(t+T)}=X(t)e^{-\Psi t}=\Phi(t),$$

т. е. $\Phi(t)$ – периодическая матрица периода T.

Тогда

$$X(t)=X(t)e^{-\Psi t}e^{\Psi t}=\Phi(t)e^{\Psi t}.$$

Теорема доказана.

Собственные значения матрицы Ψ, т. е. корни уравнения

$$\det(\Psi-\lambda E)=0$$

называются ***характеристическими показателями*** системы (12).

Поскольку устойчивость линейной системы эквивалентно ограниченности ее решений, то из теоремы Флоке следует, что система (12) с периодическими коэффициентами устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех ее характеристических показателей неположительны, причем характеристические показатели с нулевыми действительными частями допускают лишь простые элементарные делители.

Для асимптотической же устойчивости системы (12) необходимо и достаточно, чтобы действительные части ее характеристических показателей были отрицательны.

Собственные значения ρ_i матрицы $X(T)$, т. е. корни уравнения

$$\det\left(X(t)-\rho E\right)=0$$

называются ***мультипликаторами***.

Можно доказать, что между характеристическими показателями λ_i системы и ее мультипликаторами ρ_i существует следующая связь: для каждого характеристического показателя λ_i кратности r_i существует мультипликатор $\rho_i = e^{\lambda_i}$ такой же кратности r_i.

Учитывая это, имеем теорему.

Теорема. *Линейная однородная система (12) с периодической матрицей $A(t)$ устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы ρ_i расположены внутри замкнутого круга $|\rho| \le 1$, причем мультипликаторы, лежащие на окружности $|\rho| = 1$, имеют лишь простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения матрицы $X(T)$.*

Для асимптотической устойчивости периодической системы (12) необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы ее находились внутри единичного круга $|\rho| = 1$.

§ 7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\ddot{z}+a(t)\dot{z}+b(t)z=0,$$

где функция $a(t)$ дифференцируема, а $b(t)$ непрерывна, причем

$$a(t+T)=a(t), \quad b(t+T)=b(t).$$

Полагая

$$z=e^{-\frac{1}{2}\int_0^t a(\tau)d\tau}x,$$

имеем

$$\ddot{x}+p(t)x=0, \tag{14}$$

где

$$p(t)=b(t)-\frac{a^2(t)}{4}-\frac{\dot{a}(t)}{2}$$

и

$$p(t+T)=p(t).$$

Уравнение (14) называется ***уравнением Хилла***. Для исследования его устойчивости заменим его системой

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-p(t)x_1, \end{cases} \tag{15}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x,$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix},$$

причем, очевидно,

$$P(t+T) = P(t).$$

Мы пришли к системе уравнений с периодическими коэффициентами. Если $X(t)$ – матрицант системы (15), то характеристическое уравнение для мультипликаторов имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_{11}(T) - \rho & x_{12}(T) \\ x_{21}(T) & x_{22}(T) - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку

$$\operatorname{Sp} P(t) = 0,$$

то по формуле Остроградского–Лиувилля

$$\det X(T) = e^{\int_0^T \operatorname{Sp} P(\tau) d\tau} = 1.$$

Тогда, полагая

$$\operatorname{Sp} X(T) = 2A,$$

получим ***характеристическое уравнение Хилла***

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0,$$

откуда

$$\rho = A \pm \sqrt{A^2 - 1}.$$

Число A называется ***константой Ляпунова***. Используя теорему об устойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами, получим следующее:

1. Уравнение Хилла ни при каком A не будет асимптотически устойчивым.

2. Если $|A| > 1$, то решения уравнения Хилла неограничены.

3. Если $|A| < 1$, то решения уравнения Хилла ограничены.

4. Если $|A| = 1$, то необходимо провести дальнейшее исследование.

Таким образом, ограниченность или неограниченность решения уравнения Хилла может быть установлено по значению соответствующей константы Ляпунова.

Уравнение Хилла являлось предметом исследований многих знаменитых математиков. Интерес к этому уравнению, в частности, был проявлен в связи со следующими обстоятельствами. В конце XIX в. руководство Российской железнодорожной компании было весьма обеспокоено неоднократным разрушением кривошипов и спарников колес железнодорожных локомотивов. Было замечено, что при определенном режиме движения состава на некоторых сложных участках дороги (крутых или затяжных подъемах) начинается разрушение кривошипов и спарников, с помощью которых ведущее колесо паровоза соединено с другими колесами. Попечители Российской железной дороги в 1890 г. обратились к известному русскому ученому Н.Е. Жуковскому с просьбой выяснить причину данного явления и дать рекомендации, обеспечивающие безопасный режим движения.

Исследуя эту проблему, Н.Е. Жуковский установил, что причина разрушения кривошипов и спарников – параметрический резонанс упругих колебаний, возникающий из-за недостаточной жесткости материала, из которых они сделаны. При математическом описании процесса было установлено, что если обозначить величину упругих колебаний через x, то достаточно точно эти колебания описываются следующим линейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{x} + \frac{a - b\cos 4\frac{V}{R}t}{c - d\cos 4\frac{V}{R}t}x = \frac{M}{J}, \qquad (16)$$

где a, b, c, d – постоянные величины, зависящие от радиуса R колеса локомотива, длины спарника, площади его поперечного сечения и модуля упругости материала, из которого сделаны колеса и спарник, V – скорость движения состава, M – приведенный вращающий момент, приложенный к колесу, J – момент инерции колеса.

Уравнение (16) представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами. Как мы знаем, ограниченность его решений зависит от ограниченности решений однородного уравнения

$$\ddot{x}+f(t)x=0, \tag{17}$$

где

$$f(t)=\frac{a-b\cos 4\dfrac{V}{R}t}{c-d\cos 4\dfrac{V}{R}t}.$$

Исследуя эту задачу, Н.Е. Жуковский установил, что достаточным условием ограниченности решений уравнения (17) будет существование такого целого неотрицательного n, что для всех t справедливо неравенство

$$\frac{\pi^2 n^2}{T^2}\le f(t)\le\frac{\pi^2(n+1)^2}{T^2}.$$

Существуют многочисленные критерии ограниченности решений уравнения Хилла (14), оперирующие различными характеристиками функции $p(t)$. Например, приведем известную теорему Ляпунова.

Теорема (Ляпунова). *Если интегрируемая неотрицательная функция $p(t)$ периода T такова, что*

$$\int_0^T p(t)dt<\frac{4}{T}, \tag{18}$$

то все решения уравнения Хилла (14) являются ограниченными.

Замечание. При замене неравенства (18) на неравенство

$$\int_0^T p(t)dt < \frac{4}{T} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

найдется интегрируемая неотрицательная функция $p(t)$ периода T, для которой решения уравнения Хилла будут неограничены.

Пример 1. Доказать, что все решения уравнения

$$z'' + a(t)z' + b(t)z = 0$$

ограничены, если $a(t)$ и $b(t)$ – периодические функции периода π, удовлетворяющие при любом t следующим условиям:

1) $a(t) > 0$ – положительная дифференцируемая функция при любом положительном t;

2) $4 < b(t) - \frac{a^2(t)}{4} - \frac{a(t)}{2} < 9.$

Решение. Достаточно преобразовать данное уравнение к уравнению Хилла с помощью замены

$$z = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t a(s)ds}$$

и затем использовать условие Жуковского для ограниченности решений уравнения Хилла.

Пример 2. Показать, что уравнение маятника длины l, ось подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой a и частотой ω описываются уравнением

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\left(1 + \frac{a\omega^2}{g}\sin\omega t\right)\sin\varphi = 0,$$

где φ – угол отклонения от вертикали.

Решение. Полагая здесь

$$\omega t = \tau$$

и рассматривая малые отклонения маятника от положения равновесия (φ мало) имеем уравнение Хилла

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l\omega^2}\left(1 + \frac{a\omega^2}{g}\sin\tau\right)\varphi = 0.$$

Пример 3. Доказать, что если $f(t)$ – интегрируемая отрицательная функция периода T, то уравнение

$$\ddot{x} + f(t)x = 0$$

имеет неограниченные на бесконечности решения.

Решение. Таким решением, в частности, будет решение с начальными условиями

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Это становится очевидным после записи уравнения в виде

$$\ddot{x} = -f(t)x,$$

откуда следует, что для рассматриваемого решения

$$\ddot{x}(t) > 0, \quad \dot{x}(t) \geq 1.$$

§ 8. Точки покоя. Простейшие типы точек покоя

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \tag{19}$$

такую, что

$$F(0, t) = 0.$$

Точка

$$x = 0$$

называется ***точкой покоя*** системы (19).

Точка покоя называется ***устойчивой по Ляпунову***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ системы (19) с начальными условиями

$$\|x(t_0)\| < \delta,$$

при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\|x(t)\| < \varepsilon.$$

Если, кроме того, выполнено условие

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0,$$

то точка покоя называется ***асимптотически устойчивой***.

Если точка покоя не является устойчивой, то будем называть ее ***неустойчивой***.

Рассмотрим систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{20}$$

причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Точка

$$x = 0, \quad y = 0,$$

в которой правые части уравнений системы (20) обращаются в нуль, называется ***точкой покоя*** или ***особой точкой*** системы (20).

Для исследования точки покоя системы (20) составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

и найдем его корни λ_1 и λ_2.

Возможны следующие случаи:

I. Корни характеристического уравнения (21) действительные и различные:

а) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ – точка покоя асимптотически устойчива (***устойчивый узел***);

б) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ – точка покоя неустойчива (***неустойчивый узел***);

в) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ – точка покоя неустойчива (***седло***).

II. Корни характеристического уравнения (21) комплексные:

$$\lambda_{1,2} = p \pm iq.$$

а) $p < 0$, $q \neq 0$ – точка покоя асимптотически устойчива (***устойчивый фокус***);

б) $p > 0$, $q \neq 0$ – точка покоя неустойчива (***неустойчивый фокус***);

в) $p = 0$, $q \neq 0$ – точка покоя устойчива (***центр***).

III. Корни характеристического уравнения (21) кратные:

а) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ – точка покоя асимптотически устойчива (***устойчивый узел***);

б) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ – точка покоя неустойчива (***неустойчивый узел***).

Пример 1. Определить характер точки покоя системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0.$$

Его корни

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}$$

и

$$\lambda_2 = 3 - \sqrt{2}$$

действительные, различные и положительные. Следовательно, точка покоя – неустойчивый узел.

Пример 2. Будет ли устойчива точка покоя $(0,\ 0,\ 0)$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - z. \end{cases}$$

Решение. Составляя характеристическое уравнение для данной системы, имеем:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(1+\lambda)(\lambda^2+3\lambda+3)=0,$$

откуда

$$\lambda_1 = -1,$$

$$\lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Следовательно, точка покоя данной системы асимптотически устойчива.

Наука — самое важное, самое нужное в жизни человека.

А.П. Чехов

Раздел II
Уравнения с частными производными

Глава 9
Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка: основные понятия и определения. Существование и единственность решения задачи Коши для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка. Построение общего решения по методу характеристик.

§ 1. Основные определения и понятия

Дифференциальным уравнением с частными производными называется соотношение, содержащее неизвестную функцию нескольких независимых переменных, независимые переменные, а также ее частные производные по независимым переменным. Дифференциальное уравнение с частными производными с неизвестной функцией u и независимыми переменными $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$F\left(u, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \ldots\right) = 0.$$

Дифференциальное уравнение с частными производными, так же как и обыкновенное дифференциальное уравнение, может быть неполным, но оно должно содержать хотя бы одну из частных производных неизвестной функции.

Порядок старшей частной производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется ***порядком*** дифференциального уравнения.

Функция, имеющая соответствующие частные производные (предполагаемые непрерывными) и обращающая дифференциальное уравнение с частными производными в тождество, называется ***решением*** этого уравнения. Решение, содержащее все без исключения решения дифференциального уравнения, называется ***общим решением***. Процесс нахождения решений называется ***интегрированием***.

Если дифференциальное уравнение содержит неизвестную функцию u, зависящую только от двух независимых переменных x и y, то его решению $u = u(x, y)$ соответствует некоторая поверхность в пространстве $Oxyu$. Эта поверхность называется ***интегральной поверхностью*** данного уравнения.

Пример. Для дифференциального уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

очевидно, решением является функция

$$u = x^2 + y^2.$$

Геометрически этому решению соответствует параболоид вращения с осью вращения Ou. С другой стороны, нетрудно видеть, что решением этого уравнения служит функция

$$u = F\left(x^2 + y^2\right),$$

где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Таким образом, рассматриваемое уравнение имеет целое семейство решений. Геометрически этому семейству решений соответствует семейство поверхностей вращения с осью вращения Ou.

Дифференциальное уравнение первого порядка с частными производными имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad (1)$$

где $u(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Проведем классификацию дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными в зависимости от способа вхождения в уравнение неизвестной функции и ее частных производных.

Линейным неоднородным или ***квазилинейным*** дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение вида

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$

$$\ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \ldots, x_n, u), \qquad (2)$$

где $a_i(x_1, \ldots, x_n, u)$, $i = 1, \ldots, n$ и $b(x_1, \ldots, x_n, u)$ — непрерывно дифференцируемые функции, не обращающиеся одновременно в нуль в рассматриваемой области изменения переменных $(x_1, \ldots, x_n, u)$. Это уравнение линейно относительно частных производных, но может быть нелинейным относительно неизвестной функции u.

Если

$$b(x_1, \ldots, x_n, u) \equiv 0,$$

а коэффициенты a_i, $i = 1, \ldots, n$ не зависят от u, то уравнение

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \qquad (3)$$

называется ***линейным однородным*** дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка.

Во всех остальных случаях дифференциальное уравнение первого порядка с частными производными называется ***нелинейным***.

§ 2. Линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{4}$$

называется ***характеристической системой уравнений*** для линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (3), а ее интегральные кривые — ***характеристиками*** этого уравнения.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

$$\psi_i(x_1, \ldots, x_n) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

— $n-1$ независимых в области D первых интегралов для характеристической системы уравнений (4). Тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (3) имеет вид

$$u = \Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}),$$

где Φ — произвольная гладкая функция.

Доказательство. Запишем характеристическую систему уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{5}$$

Пусть ее решение представляется $n-1$ независимыми первыми интегралами:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \psi_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

Дифференцируя соотношение

$$\psi_i(x_1, \ldots, x_n) = C_i,$$

получаем:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Заменяя в этом соотношении дифференциалы dx_i, $i = 1, \ldots, n$, пропорциональными им, согласно (5), функциями $a_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$ находим:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} a_1(x_1, \ldots, x_n) + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} a_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} a_n(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Сравнивая полученное соотношение с соотношением (3), заключаем, что функции

$$u = \psi_1(x_1, \ldots, x_n), \quad u = \psi_2(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad u = \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

являются решениями дифференциального уравнения (3).

Покажем, что функция

$$z = \Phi\left(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \psi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\right), \quad (6)$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция, также является решением дифференциального уравнения (3):

$$a_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} =$$

$$= a_1(x_1, \ldots, x_n)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_{n-1}}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}\right)+$$

$$+a_2(x_1, \ldots, x_n)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_{n-1}}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2}\right)+\cdots$$

$$\cdots+a_n(x_1, \ldots, x_n)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_{n-1}}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}\right)=$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}a_1(x_1, \ldots, x_n)+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}a_2(x_1, \ldots, x_n)+\cdots+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}a_n(x_1, \ldots, x_n)\right)+$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}a_1(x_1, \ldots, x_n)+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}a_2(x_1, \ldots, x_n)+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_n}a_n(x_1, \ldots, x_n)\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_{n-1}}\left(\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}a_1(x_1, \ldots, x_n)+\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2}a_2(x_1, \ldots, x_n)+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}a_n(x_1, \ldots, x_n)\right)\equiv 0.$$

Остается показать, что функция (6) содержит все решения дифференциального уравнения (3). Пусть

$$z=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

какое-то решение дифференциального уравнения (3).

Поскольку функции $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ являются решениями дифференциального уравнения (3), то

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_2 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + a_n \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0, \\ a_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + a_2 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \cdots + a_n \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} = 0, \\ a_1 \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + a_2 \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \cdots + a_n \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} + a_2 \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} + \cdots + a_n \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Эта система представляет собой линейную однородную систему уравнений относительно неизвестных $a_1, \ldots, a_n$, имеющую в каждой точке $(x_1, \ldots, x_n)$ ненулевое решение (поскольку функции a_i, $i = 1, \ldots, n$ не обращаются одновременно в нуль). Следовательно, определитель системы должен тождественно равняться нулю.

Замечая, что определителем системы служит якобиан функций

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n),\ \psi_1(x_1, \ldots, x_n),\ \psi_2(x_1, \ldots, x_n),\ \ldots,\ \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n),$$

имеем:

$$J(\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

откуда следует, что функции

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n),\ \psi_1(x_1, \ldots, x_n),\ \psi_2(x_1, \ldots, x_n),\ \ldots,\ \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

функционально зависимы, т. е.

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \psi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

Теорема доказана.

Одной из важнейших задач, связанных с дифференциальными уравнениями, является задача Коши — задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Задачей Коши для уравнения (3) называется задача нахождения решения $u(x_1, \ldots, x_n)$ этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x_1, \ldots, x_n)\Big|_{(x_1, \ldots, x_n)\in\gamma} = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \tag{7}$$

где γ — некоторая гладкая гиперповерхность в D, а $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — заданная гладкая функция, определенная на этой гиперповерхности. Гиперповерхность γ называется ***начальной гиперповерхностью***, а функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — ***начальным условием***. Точка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \gamma$ называется ***нехарактеристической***, если характеристика, проходящая через эту точку, не касается начальной гиперповерхности γ.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — нехарактеристическая точка на гиперповерхности γ. Тогда существует окрестность точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, в которой задача Коши для дифференциального уравнения (3) имеет единственное решение.*

Можно показать, что для нахождения решения $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ задачи Коши для уравнения (3) с начальным условием (7), где начальная гиперповерхность γ задается уравнением

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

надо из системы $n+1$ уравнений

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \psi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1}, \\ u = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

исключить переменные $x_1, \ldots, x_n$ и получить соотношение вида

$$u = F(C_1, \ldots, C_n).$$

Подставляя в него вместо $C_1, \ldots, C_n$ функции $\psi_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $\psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$, получаем искомое решение задачи Коши

$$u = F\left(\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)\right).$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Найти решение, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, y, z)\Big|_{y^2+z^2=2} = \frac{2}{x^2}.$$

Решение. Соответствующая этому уравнению характеристическая система уравнений в симметрической форме имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Решая эту систему, находим два независимых первых интеграла

$$\psi_1(x, y, z) = \frac{y}{x} = C_1, \quad \psi_2(x, y, z) = \frac{z}{x} = C_2,$$

поэтому общим решением дифференциального уравнения будет функция

$$u = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Теперь найдем решение задачи Коши. Из равенств

$$u=\frac{2}{x^2},\quad y^2+z^2=2,\quad \frac{y}{x}=C_1\quad \frac{z}{x}=C_2,$$

исключим переменные x, y, z:

$$C_1^2+C_2^2=\frac{y^2+z^2}{x^2}=\frac{2}{x^2}=u.$$

Подставляя вместо C_1 и C_2 левые части первых интегралов, получаем искомое решение:

$$u(x,\,y,\,z)=\frac{y^2+z^2}{x^2}.$$

Пример 2. Найти решения уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Из всех решений выделить то, которое удовлетворяет условию

$$u(0,\,y)=py^2.$$

Решение. Из уравнения

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$$

находим характеристики

$$x^2+y^2=C.$$

Все решения исходного уравнения запишем в виде

$$u=\Phi\left(x^2+y^2\right),$$

где $\Phi(z)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Последняя формула определяет поверхность вращения вокруг оси Ou.

Найдем ту из этих поверхностей, которая проходит через параболу

$$u=py^2$$

в плоскости $x = 0$. Исключая x и y из уравнений

$$x = 0, \quad u = py^2, \quad x^2 + y^2 = C,$$

имеем:

$$u = pC.$$

Подставляя вместо C в это равенство выражение $x^2 + y^2$, получим уравнение искомой поверхности:

$$u = p\left(x^2 + y^2\right).$$

Это уравнение определяет поверхность параболоида вращения (вокруг оси Ou).

Пример 3. Найти решения уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

удовлетворяющие следующим начальным условиям:

а) $u(1, y, z) = y^2 + z^2$;

б) $u(x, y, z)\Big|_{y^2+z^2=2} = \dfrac{2}{x^2}$.

Решение. а) Составляем уравнения характеристик

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y, \\ \dfrac{dz}{dt} = z. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y = C_2 e^t, \\ z = C_3 e^t. \end{cases}$$

Определим произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 таким образом, чтобы точка $(x(0), y(0), z(0))$ принадлежала начальной поверхности — плоскости

$$x = 1.$$

Имеем:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = y, \\ C_3 = z. \end{cases}$$

Таким образом,

$$g_1(t, x, y, z) = e^t,$$

$$g_2(t, x, y, z) = y e^t,$$

$$g_3(t, x, y, z) = z e^t.$$

Следовательно, имеем:

$$u(e^t, ye^t, ze^t) = y^2 + z^2.$$

Заменяя e^t на x, y на $\frac{y}{x}$ и z на $\frac{z}{x}$, окончательно имеем:

$$u(x, y, z) = \frac{y^2 + z^2}{x}.$$

б) Решим эту задачу другим методом. Запишем уравнения характеристик в симметричной форме:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Отсюда находим два независимых первых интеграла:

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z}{x} = C_2.$$

Из равенств

$$u = \frac{2}{x^2}, \quad y^2 + z^2 = 2, \quad \frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z}{x} = C_2,$$

исключая переменные y и z, имеем:

$$\left(C_1^2 + C_2^2\right)x^2 = 2.$$

Отсюда

$$u = C_1^2 + C_2^2.$$

Подставляя $\frac{y}{x}$ вместо C_1 и $\frac{z}{x}$ вместо C_2, получаем искомое решение:

$$u(x, y, z) = \frac{y^2 + z^2}{x}.$$

Пример 4. Найти поверхность, которая пересекает под прямым углом семейство сфер

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2$$

и проходит через кривую

$$x = 1, \quad y^2 + z^2 = 1.$$

Решение. Если задано семейство поверхностей

$$F(x, y, z) = C,$$

то поверхность

$$u(x, y, z) = C_1$$

пересекает эти поверхности под прямым углом тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

В нашем случае функция $u(x, y, z)$ определяется из уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Уравнения характеристик в симметричной форме запишем в виде

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

Два независимых интеграла этих уравнений

$$\frac{y}{x}=C_1$$

и

$$\frac{z}{x}=C_2$$

определяют уравнение ортогональных траекторий указанного в задаче семейства сфер

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)=0,$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция.

Найдем ту из поверхностей, которая проходит через заданную линию. Исключая из уравнений

$$x=1,\quad y^2+z^2=1,\quad \frac{y}{x}=C_1,\quad \frac{z}{x}=C_2$$

переменные x, y и z, получим

$$C_1^2+C_2^2=1.$$

Заменяя в этом равенстве C_1 и C_2 соответственно на $\frac{y}{x}$ и $\frac{z}{x}$, окончательно находим

$$y^2+z^2=x^2.$$

Это и есть искомая поверхность — прямой круговой конус, осью которого является ось Ox, образующими являются прямые, проходящие через начало координат, а направляющей служит окружность $y^2+z^2=1$ в плоскости $x=1$.

§ 3. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

Характеристическая система уравнений для линейного неоднородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (2) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \ldots, x_n, u), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2(x_1, \ldots, x_n, u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x_1, \ldots, x_n, u), \\ \dfrac{du}{dt} = b(x_1, \ldots, x_n, u). \end{cases} \tag{8}$$

Формулировка ***задачи Коши*** для линейного неоднородного дифференциального уравнения (2) остается такой же, как и для линейного однородного дифференциального уравнения (3).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Задача Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (2) имеет единственное решение в достаточно малой окрестности любой нехарактеристической точки на начальной гиперповерхности. Это решение определяется соотношением*

$$u\big(g(x_1, \ldots, x_n, t)\big) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) + \int_0^t b\big(g(x_1, \ldots, x_n, \tau)\big)d\tau,$$

где вектор $g(x_1, \ldots, x_n, t)$ *является решением характеристической системы уравнений (8) с начальным условием*

$$g_i(x_1, \ldots, x_n, 0) = x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Несложно показать, что если

$$\psi_i(x_1, \ldots, x_n, u) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{9}$$

— n независимых первых интегралов характеристической системы уравнений (8), то все решения уравнения (2) определяются формулой

$$\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_n) = 0,$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция.

Можно также показать, что для нахождения решения $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ задачи Коши для уравнения (2) с начальным условием (7), где начальная гиперповерхность γ задается уравнением

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

надо из системы $n+2$ уравнений

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \psi_1(x_1, \ldots, x_n, u) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u) = C_n, \\ u = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

исключив $x_1, \ldots, x_n, u$, получить соотношение вида

$$F(C_1, \ldots, C_n) = 0.$$

Подставляя в него вместо $C_1, \ldots, C_n$ левые части соотношений (9), получаем соотношение

$$F(\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = 0,$$

которое неявным образом определяет искомое решение $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ задачи Коши.

Интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения (2) может быть следующим образом сведено к ин-

тегрированию линейного однородного уравнения. Пусть решение $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (2) удовлетворяет некоторому соотношению

$$V(x_1, \ldots, x_n, u) = 0,$$

причем

$$\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0.$$

Продифференцировав тождество

$$V(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$$

по x_i, $i = 1, \ldots, n$, получим:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Подставляя полученное выражение для $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ в уравнение (2), имеем:

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\left(-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}\right) + a_2(x_1, \ldots, x_n, u)\left(-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}\right) + \cdots$$

$$\cdots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\left(-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}\right) = b(x_1, \ldots, x_n, u)$$

или же

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1}+a_2(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_2}+\cdots$$

$$\cdots+a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n}+b(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u}=0, \qquad (10)$$

и мы пришли к линейному однородному дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка.

Если

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u)=C_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)=C_n$$

— n независимых первых интегралов характеристической системы уравнений для линейного однородного дифференциального уравнения (10), то его общее решение имеет вид

$$V(x_1, \ldots, x_n, u)=\Phi\left(\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)\right),$$

где Φ — произвольная гладкая функция.

Тогда искомое решение линейного неоднородного уравнения (2) определяется неявным образом из соотношения

$$\Phi\left(\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)\right)=0.$$

Пример 1. Найти решение задачи Коши

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=y^2-x^2, \quad u(x, y)\Big|_{x=0}=\frac{1}{y^2}.$$

Решение. Система уравнений характеристик имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-x.\end{cases}$$

Ее решениями являются функции

$$x(t)=C_1\sin t+C_2\cos t,$$

$$y(t)=C_1\cos t-C_2\sin t.$$

Среди этих функций выберем те, значения которых при $t=0$ лежат на прямой $x=0$, т. е. удовлетворяющие начальному условию

$$x(0)=0,\quad y(0)=y.$$

Тогда

$$C_1=y,\quad C_2=0$$

и мы имеем:

$$g_1(x,\,y,\,t)=y\sin t,$$

$$g_2(x,\,y,\,t)=y\cos t.$$

Согласно уравнению (7), искомое решение задачи Коши имеет вид

$$u(y\sin t,\,y\cos t)=\frac{1}{y^2}+\int_0^t y^2\left(\cos^2\tau-\sin^2\tau\right)d\tau=\frac{1}{y^2}+\frac{y^2}{2}\sin 2t.$$

После замены $y\sin t$ и $y\cos t$ на x и y соответственно, окончательно получаем:

$$u(x,\,y)=\frac{1}{x^2+y^2}+xy.$$

Пример 2. Найти решения задачи Коши:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2xy,$$

$$u(x,\,x)=x^2.$$

Решение. Составляем уравнения характеристик:

$$\frac{dx}{dt}=x,\quad \frac{dy}{dt}=y.$$

Их решения имеют вид

$$x = C_1 e^t, \quad y = C_2 e^t.$$

Таким образом, характеристики есть лучи прямых

$$y = \frac{C_2}{C_1} x.$$

В нашем случае начальная поверхность

$$y = x$$

состоит из характеристик, т. е. все ее точки являются характеристическими.

Попытаемся найти искомое решение, исходя из общего решения исходного уравнения. Составим систему в симметричной форме:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2xy}$$

и найдем ее два независимых интеграла:

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad xy - u = C_2.$$

Поэтому все решения исходного уравнения даются формулой

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, xy - u\right) = 0,$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, или, разрешая последнее равенство относительно второго аргумента функции, имеем:

$$u = xy + f\left(\frac{y}{x}\right),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция.

Используя начальное условие

$$u(x, y)\Big|_{x=y} = x^2,$$

имеем

$$u(x, x) = x^2 + f(1) = x^2$$

убеждаемся, что решениями данной задачи Коши являются функции

$$u = xy + f\left(\frac{y}{x}\right),$$

где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$f(1) = 0.$$

Пример 3. Найти решение задачи Коши

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0,$$

$$u(x, y)\Big|_{xy=1} = 1.$$

Решение. Уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{-xy}.$$

Из этих уравнений находим два первых интеграла:

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad y^2 + \frac{yu^2}{x} = C_2.$$

Исключив x, y, u из уравнений

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad y^2 + \frac{yu^2}{x} = C_2, \quad xy = 1, \quad u = 1,$$

получим

$$2C_1 = C_2.$$

После замены C_1 и C_2 соответственно выражениями $\frac{y}{x}$ и $y^2+\frac{yu^2}{x}$, имеем

$$\frac{2y}{x}=y^2+\frac{yu^2}{x},$$

откуда

$$u^2=2-xy.$$

Последнее соотношение в области $xy<2$ определяет два гладких решения исходного уравнения:

$$u=\pm\sqrt{2-xy}.$$

Одно из них, а именно

$$u=\sqrt{2-xy},\quad xy<2$$

является искомым решением задачи Коши.

Пример 4. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u-x^2-y^2$$

и проходящую через параболу

$$u=x-x^2,$$

лежащую в плоскости

$$y=-2.$$

Решение. Составляем уравнения характеристик в симметричной форме:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u-x^2-y^2}$$

и находим их первые интегралы:

$$\frac{x}{y}=C_1, \quad \frac{x^2+y^2+u}{y}=C_2.$$

Следовательно, все решения уравнения даются формулой

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{x^2+y^2+u}{y}\right)=0$$

или

$$u=yf\left(\frac{x}{y}\right)-x^2-y^2,$$

где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Остается подобрать такую функцию f, чтобы выполнялось начальное условие

$$u(x, -2)=x-x^2,$$

т. е., чтобы имело место равенство

$$x-x^2=-2f\left(\frac{x}{-2}\right)-x^2-4$$

или

$$f\left(-\frac{x}{2}\right)=-\frac{x}{2}-2,$$

откуда

$$f(x)=x-2.$$

Таким образом, решением исходной задачи Коши является функция

$$u=y\left(\frac{x}{y}-2\right)-x^2-y^2=x-2y-x^2-y^2.$$

Эта поверхность является параболоидом вращения, осью которого является прямая

$$x=\frac{1}{2}, \quad y=-1.$$

Корень учения горек, да плод его сладок.
Русская пословица

Глава 10
Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка–I

Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка: основные определения и понятия. Задача Коши для дифференциального уравнения с частными производными второго порядка: геометрическая интерпретация, существование и единственность решения. Уравнение колебаний струны.

§ 1. Основные определения и понятия

Дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка называется соотношение вида

$$F\left(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}\right)=0, \qquad (1)$$

где $u=u(x,\ y)$ — искомая функция, а x и y — ее независимые переменные. В качестве его решений будем рассматривать лишь такие функции, частные производные которых непрерывны. В этом случае, как известно,

$$u_{xy}=u_{yx}.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0,$$

где коэффициенты $a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ b_1,\ b_2,\ c,\ f$ зависят только от переменных x и y, называется ***линейным дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка***. Если при этом

$$f(x,\ y)\equiv 0,$$

то такое уравнение называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка***, в противном случае оно называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка***.

Линейное однородное уравнение обладает ***свойством суперпозиции решений***: если $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — два его решения, то их произвольная линейная комбинация

$$C_1u_1(x, y)+C_2u_2(x, y),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения (проверьте самостоятельно!).

Линейное неоднородное уравнение обладает следующим свойством: если $u_0(x, y)$ — некоторое его решение, а $u(x, y)$ — решение соответствующего ему однородного уравнения, то функция

$$u_0(x, y)+Cu(x, y),$$

где C — произвольная постоянная, также является решением неоднородного уравнения (проверьте самостоятельно!).

Дифференциальное уравнение (1) называется ***линейным относительно старших производных***, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F_1(x, y, u, u_x, u_y)=0, \qquad (2)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят только от переменных x и y. Если же

$$a_{ij}=a_{ij}(x, y, u, u_x, u_y), \quad i, j=1, 2,$$

то уравнение (2) называется ***квазилинейным***.

§ 2. Задача Коши для дифференциального уравнения с частными производными второго порядка и ее геометрическая интерпретация

Пусть на плоскости Oxy задана некоторая кривая γ и вдоль этой кривой задано значение функции $u(x, y)$ и ее производной по нормали:

$$u(x, y)\big|_{\gamma} = \varphi(x, y), \tag{3}$$

$$\left.\frac{du(x, y)}{dn}\right|_{\gamma} = \psi(x, y). \tag{4}$$

Задача нахождения решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющего соотношениям (3)–(4), называется ***задачей Коши для уравнения с частными производными второго порядка***. Установим ее геометрический смысл.

Искомому решению $u = u(x, y)$ дифференциального уравнения (1) соответствует некоторая поверхность в пространстве $Oxyu$. Заметим, что соотношение (3) определяет в пространстве $Oxyu$ некоторую кривую Г, через которую эта поверхность должна проходить.

Пусть кривая γ задается параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha < t < \beta.$$

Как известно из курса дифференциальной геометрии, в точке $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$ значение производной по направлению касательной находится следующим образом:

$$\left.\frac{du}{d\tau}\right|_{M_0} = \left.\frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt}\right|_{t=t_0}, \tag{5}$$

где

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0).$$

Несложно убедиться в справедливости формул

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \tau}\cos(\tau, x) + \dfrac{\partial u}{\partial n}\cos(n, x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \tau}\cos(\tau, y) + \dfrac{\partial u}{\partial n}\cos(n, y). \end{cases} \tag{6}$$

Поскольку направление касательной τ задается вектором

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right),$$

а направление нормали n — вектором

$$\left(-\frac{dy(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt}\right),$$

то в каждой точке кривой γ можно определить

$$\cos(\tau, x),\ \cos(\tau, y),\ \cos(n, x),\ \cos(n, y),$$

и, из системы (6), найти

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\gamma} \text{ и } \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\gamma}.$$

Это означает, что в каждой точке кривой Γ нам известно расположение касательной плоскости к поверхности $u = u(x, y)$, уравнение которой, как известно, имеет вид:

$$u - u_0 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} (x - x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} (y - y_0). \tag{7}$$

Таким образом, ***геометрическая интерпретация задачи Коши*** для дифференциального уравнения с частными производными второго порядка состоит в нахождении поверхности $u = u(x, y)$, уравнение которой является решением дифференциального уравнения (1), проходящую через заданную пространственную кривую, определяемую соотношением (3), и касающуюся в каждой ее точке заданной плоскости, определяемой из условий (3)–(4) с помощью соотношений (5)–(7).

§ 3. Существование и единственность решения задачи Коши

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \tag{8}$$

называется ***характеристическим уравнением*** для дифференциального уравнения (2), линейного относительно частных производных. Кривая, уравнение которой удовлетворяет дифференциальному уравнению (8), называется ***характеристикой***.

Теорема. *Если кривая γ в задаче Коши не является характеристикой, то задача Коши имеет единственное решение (которое будет аналитической функцией). Если же кривая γ является характеристикой, то задача Коши или не имеет единственного решения, или имеет бесконечное множество решений.*

Доказательство. Обозначим для краткости

$$u_x = p, \quad u_y = q, \quad u_{xx} = r, \quad u_{xy} = s, \quad u_{yy} = t.$$

Тогда уравнение (2) перепишется в виде

$$a_{11}r + 2a_{12}s + a_{22}t = -F_1(x, y, u, p, q) = F(x, y, u, p, q).$$

С помощью введенных обозначений очевидные соотношения

$$\begin{cases} du_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}dy = u_{xx}dx + u_{xy}dy, \\ du_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}dy = u_{xy}dx + u_{yy}dy, \end{cases}$$

перепишутся в виде

$$\begin{cases} dp = rdx + sdy, \\ dq = sdx + tdy. \end{cases} \tag{9}$$

Если τ — вектор, направленный по касательной к кривой γ, то для любой точки $M \in \gamma$ имеем:

$$d\tau\big|_M = (dx,\ dy)\big|_M .$$

Пусть $dp\big|_M$ и $dq\big|_M$ — дифференциалы функций p и q, вычисленные в точке M при движении вдоль кривой γ. Поскольку

$$\begin{cases} dp\big|_M = \dfrac{dp}{d\tau} d\tau\Big|_M, \\ dq\big|_M = \dfrac{dq}{d\tau} d\tau\Big|_M, \end{cases}$$

то, если мы знаем $p\big|_M$ и $q\big|_M$, то можем считать известными $dp\big|_M$ и $dq\big|_M$.

Таким образом, в произвольной точке $M \in \gamma$ имеем систему

$$\left.\begin{cases} a_{11}r + 2a_{12}s + a_{22}t = F(x,\ y,\ u,\ p,\ q), \\ rdx + sdy = dp, \\ sdx + tdy = dq. \end{cases}\right|_M \qquad (10)$$

трех линейных уравнений с тремя неизвестными $r\big|_M$, $s\big|_M$, $t\big|_M$. Определитель этой системы равен

$$\Delta\big|_M = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2\Big|_M .$$

Следовательно, если кривая γ такова, что в любой ее точке

$$\Delta\big|_M \neq 0,$$

то из системы (10) однозначно находятся $r\big|_M$, $s\big|_M$, $t\big|_M$; в противном случае система (10) или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений.

Пусть $\Delta\big|_M \neq 0$. Дифференцируя каждое уравнение системы (10) по x, получаем систему

$$\left.\begin{cases} a_{11}r_x + 2a_{12}s_x + a_{22}t_x = F_2(x, y, u, p, q, r, s, t), \\ r_x dx + s_x dy = dr, \\ s_x dx + t_x dy = ds, \end{cases}\right|_M,$$

а дифференцируя каждое уравнение системы (10) по y, получаем систему

$$\left.\begin{cases} a_{11}r_y + 2a_{12}s_y + a_{22}t_y = F_2(x, y, u, p, q, r, s, t), \\ r_y dx + s_y dy = ds, \\ s_y dx + t_y dy = dt. \end{cases}\right|_M.$$

Из этих систем однозначно находим

$$r_x\big|_M,\ s_x\big|_M,\ t_x\big|_M,\ r_y\big|_M,\ s_y\big|_M,\ t_y\big|_M.$$

Продолжая этот процесс, мы определяем производные всех порядков от функций r, s, t в точке M. Это позволяет составить ряд Тейлора в окрестности каждой точки $M \in \gamma$. Можно показать, что в достаточно малой окрестности точки M полученный ряд будет сходиться к некоторой функции $u(x, y)$. Эта функция, по построению, является аналитической функцией, удовлетворяющей всем условиям задачи Коши. Единственность решения задачи Коши следует из единственности представления функции рядом Тейлора. **Теорема доказана**.

Иногда начальные условия для нахождения решения дифференциального уравнения с частными производными второго порядка отличаются от рассмотренной выше постановки задачи Коши. В частности, может быть задано значение искомой функции $u(x, y)$ на кривой γ и значение ее производной по направлению l, несовпадающему с направлением нормали к кривой γ (в качестве направления l может быть выбрано направление осей Ox или Oy).

Для любого направления l имеем:

$$\frac{du}{dl}=\frac{du}{d\tau}\cos(\tau,\ l)+\frac{du}{dn}\cos(n,\ l), \tag{11}$$

причем, поскольку известно значение $u\big|_{\gamma}$, то известно и $\left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\gamma}$.

Пусть направление l не совпадает с направлением τ, т. е.

$$\cos(n,\ l)\neq 0.$$

Тогда рассматриваемую задачу мы также будем называть задачей Коши, так как в каждой точке кривой γ мы можем из соотношения (11) найти производную по нормали $\left.\frac{du}{dn}\right|_{\gamma}$.

Если же направление l совпадает с направлением τ, то

$$\cos(n,\ l)=0,\quad \cos(\tau,\ l)=1.$$

В этом случае будем говорить, что задача Коши поставлена некорректно, так как она не имеет единственного решения — если

$$\left.\frac{du}{dl}\right|_{\gamma}=\left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\gamma},$$

то она имеет бесчисленное множество решений; если же

$$\left.\frac{du}{dl}\right|_{\gamma}\neq\left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\gamma},$$

задача не имеет ни одного решения.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{y=0}=3x^2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=1-x.$$

Решение. Кривой γ является прямая

$$y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$dx^2 = 0$$

и определяет семейство характеристик

$$x = C.$$

Заметим, что кривая γ не является характеристикой; следовательно, задача Коши имеет единственное решение.

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$u = yF(x) + \Phi(x),$$

где $F(x)$ и $\Phi(x)$ — произвольные функции (проверьте самостоятельно!).

Из начальных условий находим:

$$\Phi(x) = 3x^2, \quad F(x) = 1 - x,$$

так что

$$u = (1 - x)y + 3x^2.$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{x=0} = 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 1 - y.$$

Решение. Здесь кривой γ является ось Oy, которая принадлежит семейству характеристик

$$x = C,$$

поэтому данная задача не имеет единственного решения.

Как и в предыдущем случае, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$u = yF(x) + \Phi(x),$$

где $F(x)$ и $\Phi(x)$ — произвольные функции. Из начальных условий получаем:

$$\begin{cases} yF(0) + \Phi(0) = 3y^2, \\ yF'(0) + \Phi'(0) = 1 - y. \end{cases}$$

Очевидно, эта система неразрешима; следовательно, задача Коши не имеет решения.

Пример 3. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{x=0} = 3y, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = y.$$

Решение. Здесь кривой γ снова является ось Oy, которая принадлежит семейству характеристик

$$x = C,$$

(см. выше) поэтому и эта задача Коши не может иметь единственного решения.

Как и ранее, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$u = yF(x) + \Phi(x),$$

где $F(x)$ и $\Phi(x)$ — произвольные функции. Из начальных условий получаем систему

$$\begin{cases} yF(0)+\Phi(0)=3y, \\ yF'(0)+\Phi'(0)=y. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что решением задачи Коши служит любая функция вида

$$u=yF(x)+\Phi(x),$$

где $F(x)$ — произвольная дифференцируемая функция, такая, что

$$F(0)=3, \quad F'(0)=1,$$

а $\Phi(x)$ — произвольная дифференцируемая функция, такая, что

$$\Phi(0)=\Phi'(0)=0.$$

Пример 4. Найти решение задачи Коши

$$u_{xy}=0,$$

$$u\big|_{y=0}=3x^2, \quad u_y\big|_{y=0}=1-x.$$

Решение. Общее решение уравнения $u_{xy}=0$

$$u=\Phi_1(x)+\Phi_2(y).$$

Из начальных условий имеем систему

$$\begin{cases} \Phi_1(x)+\Phi_2(0)=3x^2, \\ \Phi_2'(0)=1-x. \end{cases}$$

Очевидно эта система неразрешима.

Здесь кривая γ, на которой заданы начальные условия ($y=0$) является характеристикой. Поэтому задача Коши не может иметь единственного решения. В данном случае система неразрешима.

Если бы начальные условия имели вид

$$u\big|_{y=0}=3x^2, \quad u_y\big|_{y=0}=1,$$

то решением этой задачи была бы любая из функций

$$u=3x^2-\Phi_2(0)+\Phi_2(y),$$

где $\Phi_2(y)$ — дифференцируемая функция, такая, что

$$\Phi_2'(0)=1.$$

Пример 5. Решить задачу Коши

$$u_{yy}=0,$$

$$u\big|_{y=0}=3x^2, \quad u_x\big|_{y=0}=1-x.$$

Общее решение уравнения $u_{yy}=0$ имеет вид

$$u=y\Phi_1(x)+\Phi_2(x).$$

Начальные условия приводят к системе

$$\begin{cases}\Phi_2(x)=3x^2,\\ \Phi_2'(x)=1-x.\end{cases}$$

Очевидно, эта система неразрешима.

Заметим, что, строго говоря, эта задача не является задачей Коши. В самом деле, задача Коши требует, чтобы были заданы значения искомой функции $u(x, y)$ на кривой γ и значение производной по нормали $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\gamma}$. В данном случае кривая γ имеет вид

$$y=0,$$

и нормалью к ней является прямая, параллельная оси Oy. Нам же известна производная по направлению оси Ox, то есть — производная по *касательной* к кривой γ. Поэтому теорема единственности решения задачи Коши здесь неприменима.

Если бы начальные условия имели вид:

$$u\big|_{y=0} = 3x^2, \quad u_x\big|_{y=0} = 6x,$$

то решением этой задачи была бы любая функция вида

$$u(x, y) = y\Phi_1(x) + 3x^2,$$

где $\Phi_1(x)$ — произвольная дифференцируемая функция.

§ 4. Уравнение колебаний струны

Струной называется тонкая нить, которая может свободно изгибаться. Рассмотрим натянутую струну, положение равновесия которой совпадает с осью Ox. Струна предполагается изгибаемой без всякого усилия, а колебания ее настолько малы, что изменением ее длины в процессе колебаний можно пренебречь. Кроме того, струна предполагается бесконечной, т. е. имеющая настолько большую длину, что влияние ее концов не сказывается на колебании любой ее точки.

Пусть на точку с координатой x действует сила натяжения струны $T(x)$, направленная по касательной к струне. Кроме того, на струну действует внешняя сила, направленная перпендикулярно оси Ox, плотность распределения которой вдоль струны задается функцией $F(x, t)$. Смещение точки струны с координатой x в момент времени t задается функцией $u(x, t)$.

Рассмотрим отрезок струны (сделайте рисунок самостоятельно!), расположенный на отрезке $[x', x'']$, заменив отброшенные части силами натяжения $T(x')$ и $T(x'')$. Внешняя сила, действующая на отрезок струны на рассматриваемом участке, равна

$$\int_{x'}^{x''} F(x, t)dx.$$

При малом $\Delta x = x'' - x'$ длина дуги AB приближенно определяется выражением

$$AB \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\Delta x,$$

но, поскольку длина струны, по предположению, не изменяется, то

$$AB = \Delta x.$$

Из этих равенств вытекает, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 << 1$$

(а также то, что наклон струны к оси Ox в процессе колебания остается весьма малым).

Пусть сила натяжения $T(x')$ направлена под углом α' к оси Ox, а сила натяжения $T(x'')$ — под углом α'' к оси Ox. Пусть также ρ — линейная плотность струны (т. е. масса единицы ее длины). Так как $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ есть ускорение точек струны, то равнодействующая сил инерции на участке $[x', x'']$ равна

$$\int_{x'}^{x''} \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx.$$

Спроектируем силы, действующие на участок струны AB, на ось Ox:

$$T(x'')\cos\alpha'' - T(x')\cos\alpha' = 0.$$

Замечая, что

$$\cos\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha''}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x''}\right)^2}} \approx 1$$

и, аналогично,

$$\cos\alpha' \approx 1,$$

имеем:

$$T(x'')=T(x'),$$

то есть

$$T(x)\equiv T=\text{const}.$$

Спроектируем силы, действующие на участок струны AB, на ось Ou:

$$T(x'')\sin\alpha''-T(x')\sin\alpha'+\int_{x'}^{x''}F(x,t)\,dx=\int_{x'}^{x''}\rho\frac{\partial^2u(x,\,t)}{\partial t^2}dx$$

или

$$\int_{x'}^{x''}\left(\rho\frac{\partial^2u(x,\,t)}{\partial t^2}-T\frac{\partial\sin\alpha}{\partial x}+F(x,\,t)\right)dx=0, \qquad (12)$$

так как

$$\int_{x'}^{x''}\frac{\partial\sin\alpha}{\partial x}dx=\sin\alpha''-\sin\alpha'.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha=u_x$, то

$$\frac{\partial\sin\alpha}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+(u_x)^2}}\right)=\frac{u_{xx}}{\sqrt{1+(u_x)^2}}\approx u_{xx}$$

(проверьте самостоятельно!) и равенство (12) принимает вид

$$\int_{x'}^{x''}\left(\rho u_{tt}(x,\,t)-T\,u_{xx}(x,\,t)+F(x,\,t)\right)dx=0.$$

Так как это равенство имеет место для любого участка $[x',\,x'']$ струны, то подынтегральное выражение тождественно равно нулю в каждый момент времени, т. е.

$$\rho u_{tt}(x,\,t)-T\,u_{xx}(x,\,t)+F(x,\,t)=0$$

или

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \tag{13}$$

где

$$a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad f(x, t) = -\frac{F(x, t)}{\rho}.$$

Уравнение (13) называется ***уравнением колебаний струны*** или ***волновым уравнением***. Если $f(x, t) = 0$, то уравнение описывает ***свободные*** колебания струны; в противном случае — ***вынужденные***.

Возникновение колебания струны можно представить следующим образом: в начальный момент времени $t = 0$ струне придается некоторая форма и каждой ее точке сообщается некоторая скорость. Это означает, что функция $u(x, t)$ (начальное отклонение струны) известна при $t = 0$:

$$u(x, t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{14}$$

а также функция $u_t(x, t)$ (начальная скорость струны) известна при $t = 0$:

$$u_t(x, t)\big|_{t=0} = \psi(x). \tag{15}$$

Таким образом, для определения формы струны следует найти решение $u(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$ уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям (14)–(15).

Пример 1. Струна длины l натянута силой T_0 и находится в прямолинейном положении равновесия. В момент $t = 0$ точкам струны сообщаются начальные отклонения и скорости. Поставить задачу для определения малых поперечных колебаний струны при $t > 0$, если концы струны свободны, т.е. могут свободно перемещаться по прямым, параллельным отклонению u.

Решение. Если $\rho(x, t)$ — линейная плотность внешних сил, то уравнение колебаний, как известно, будет иметь вид

$$T_0 u_{xx} - \rho(x) u_{tt} + \rho(x, t) = 0.$$

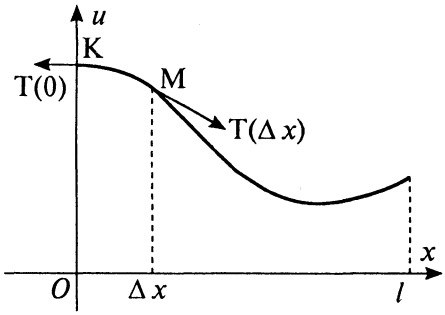

Рис. 9

В случае свободных концов, для получения условия при $x=0$ спроектируем на ось Ou силы, действующие на участок KM (см. рис. 9). Так как натяжение в точке струны $x=0$ действует лишь параллельно оси Ox, то проекция сил натяжения на участок KM равна $T_0 u_x(\Delta x, t)$.

Проекция внешней силы $\rho(0, t)\Delta x$ равна нулю, а проекция сил инерции равна $-\rho u_{tt}(0, t)\Delta x$. Приравнивая их сумму, получим соотношение

$$T_0 u_x(\Delta x, t)+\rho(0, t)\Delta x-\rho u_{tt}(0, t)\Delta x=0.$$

Устремив Δx к нулю, вследствие непрерывности и ограниченности входящих в соотношение функций получим условие

$$u_x\big|_{x=0}=0.$$

Аналогично получается условие на правом конце.

Итак, искомая функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$T_0 u_{xx}-\rho(x)u_{tt}+\rho(x, t)=0,$$

начальным условиям

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x)$$

и граничным условиям

$$u_x\big|_{x=0}=0, \quad u_x\big|_{x=l}=0.$$

Пример 2. Для струны, описанной в предыдущем примере, найти форму граничных условий, если концы струны закреплены упруго, т.е. каждый конец испытывает со стороны заделки сопротивление, пропорциональное отклонению и направленное противоположно ему.

Решение. Действие упругих сил заделки на левом конце задается выражением $-ku(0, t)$. Приравняем в этом случае к нулю проекцию на ось Ou всех сил, действующих на участок КМ. В результате, к левой части уравнения добавится еще один член $-ku(0, t)$, т. е. имеем:

$$T_0 u_x(\Delta x, t) - ku(0, t) + \rho(0, t)\Delta x - \rho u_{tt}(0, t)\Delta x = 0.$$

Устремляя $\Delta x \to 0$, получим

$$(u_x - hu)\big|_{x=0} = 0, \quad h = \frac{k}{T_0}.$$

Аналогично на правом конце получим

$$(u_x - hu)\big|_{x=l} = 0.$$

Итак, граничные условия в случае упругого закрепления концов струны имеют вид

$$(u_x - hu)\big|_{x=0} = 0, \quad (u_x - hu)\big|_{x=l} = 0.$$

Хорошая книга — драгоценная сокровищница.

Г.Б. Зардаби

Глава 11
Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка–II

Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Эллиптический, гиперболический и параболический тип. Приведение к каноническому виду квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Формула Даламбера. Формула Даламбера для полубесконечной струны. Корректность постановки задачи Коши для волнового уравнения.

§ 1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F\left(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y\right) = 0. \qquad (1)$$

Для нахождения общего решения этого уравнения его следует сначала преобразовать к наиболее простому виду путем перехода к новым координатам.

Рассмотрим, как преобразуется это уравнение, если мы перейдем к новым координатам ξ, η, определяемым соотношениями

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,\ y), \\ \eta = \eta(x,\ y), \end{cases} \qquad (2)$$

где преобразование (2) является взаимно однозначным в рассматриваемой области. Напомним, что достаточным условием взаим-

ной однозначности является отличие от нуля якобиана преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x .$$

Пусть в новых координатах функция u имеет вид $u(\xi, \eta)$. Ее зависимость от исходных координат x, y задается сложной функцией

$$u(\xi(x, y), \eta(x, y)).$$

Дифференцируя функцию эту как сложную функцию по x и по y, находим связь частных производных функции u по исходным и новым переменным:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.$$

Подставляя полученные выражения для частных производных в дифференциальное уравнение (1), приходим к дифференциальному уравнению в новых координатах ξ, η:

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} + \bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \qquad (3)$$

где

$$\bar{a}_{11} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2,$$

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = F(x, y, u, u_x, u_y) + u_\xi (a_{11} \xi_{xx} + 2a_{12} \xi_{xy} + a_{22} \xi_{yy}) +$$

$$+ u_\eta (a_{11} \eta_{xx} + 2a_{12} \eta_{xy} + a_{22} \eta_{yy}).$$

Будем называть ***определителем*** дифференциального уравнения (1) выражение

$$\Delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}.$$

Несложно показать, что

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x\right)^2,$$

то есть

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta) = \Delta(x, y)J^2. \tag{4}$$

Будем говорить, что дифференциальное уравнение (1) является в области G (или в некоторой точке Q) ***уравнением гиперболического типа***, если в области G (точке Q)

$$\Delta(x, y) > 0;$$

уравнением параболического типа, если

$$\Delta(x, y) = 0,$$

и ***уравнением эллиптического типа***, если

$$\Delta(x, y) < 0.$$

Как следует из равенства (4), тип дифференциального уравнения не зависит от выбора системы координат.

Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \tag{5}$$

называется ***вспомогательным уравнением*** для дифференциального уравнения (1).

Лемма. *Функция $z(x, y)$ является решением вспомогательного уравнения (5) тогда и только тогда, когда соотношение*

$$z(x, y) = C$$

является общим решением характеристического уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \qquad (6)$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение $z(x, y) = C$. Пусть, для определенности, $z_y \neq 0$ в некоторой точке P. Тогда, по теореме о неявной функции в окрестности этой точки существует функция $y = y(x)$, такая, что имеет место тождество

$$z(x, y(x)) \equiv C.$$

Продифференцируем это соотношение по переменной x:

$$z_x + z_y y' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{z_x}{z_y}. \qquad (7)$$

Пусть функция $z(x, y)$ является решением вспомогательного уравнения (5). Из соотношения (7) имеем

$$dy = -\frac{z_x}{z_y}dx,$$

поэтому

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = a_{11}\left(-\frac{z_x}{z_y}dx\right)^2 - 2a_{12}dx\left(-\frac{z_x}{z_y}dx\right) + a_{22}dx^2 =$$

$$= \frac{a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2}{z_y^2} = 0,$$

т. е. функция $y = y(x)$ является решением характеристического уравнения (6).

Пусть теперь функция $y = y(x)$ является решением характеристического уравнения (6). Тогда, из соотношения (7), имеем

$$z_x = -z_y\frac{dx}{dy},$$

откуда

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=a_{11}\left(-z_y\frac{dx}{dy}\right)^2+2a_{12}\left(-z_y\frac{dx}{dy}\right)z_y+a_{22}z_y^2=$$

$$=\frac{a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2}{dx^2}z_y^2=0,$$

т. е. функция $z=z(x,y)$ является решением вспомогательного уравнения (5). **Лемма доказана.**

Характеристическое уравнение (6) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, симметричным относительно dx и dy. В точках, где $a_{11}\neq 0$, его можно записать в виде

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0.$$

Разрешая получившееся квадратное уравнение относительно производной, получаем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{11}},$$

т. е. характеристическое уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{\Delta}}{a_{11}}. \tag{9}$$

(Если $a_{11}=0$, а $a_{22}\neq 0$, то характеристическое уравнение можно разрешить относительно $\frac{dx}{dy}$; если же $a_{11}=a_{22}=0$, то решения характеристического уравнения находятся очевидным образом.)

§ 2. Приведение к каноническому виду квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

а) Уравнение гиперболического типа. В этом случае $\Delta(x, y) > 0$ и уравнения (8)–(9) определяют два семейства характеристик:

$$\xi(x, y) = C$$

и

$$\eta(x, y) = C.$$

По доказанной лемме функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ удовлетворяют вспомогательному уравнению (5).

Выберем $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ в качестве новых координат и преобразуем уравнение (1) к этим координатам. Мы получим уравнение вида (3), причем

$$\overline{a}_{11} = \overline{a}_{22} = 0.$$

Действительно,

$$\overline{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$$

и

$$\overline{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 = 0,$$

поскольку функции $z = \xi(x, y)$ и $z = \eta(x, y)$ по доказанной лемме являются решениями вспомогательного уравнения (5).

Заметим, что $\overline{a}_{12} \neq 0$, иначе уравнение (3) не содержало бы вторых производных, а значит, после обратного преобразования координат, уравнение (1) стало бы уравнением первого, а не второго порядка. Поэтому, разделив уравнение (3) на $\overline{a}_{12}$, получаем ***первый канонический вид уравнения гиперболического типа***:

$$u_{\xi\eta} + F\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0.$$

Сделав преобразование координат

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta,$$

получим ***второй канонический вид уравнения гиперболического типа***:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + F_1\left(\xi, \eta, u, u_\alpha, u_\beta\right) = 0$$

(проверьте самостоятельно!).

б) Уравнение параболического типа. В этом случае $\Delta(x, y) = 0$ и уравнения (8)–(9) совпадают и определяют одно семейство характеристик

$$\xi(x, y) = C.$$

По доказанной лемме функция $\xi(x, y)$ удовлетворяет вспомогательному уравнению (5), т. е.

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0. \qquad (10)$$

Пусть $\eta(x, y)$ — произвольная функция, функционально независимая от $\xi(x, y)$. Выберем $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ в качестве новых координат и преобразуем уравнение (1) к этим координатам. Мы получим уравнение вида (3), причем

$$\bar{a}_{12} = 0.$$

Действительно, поскольку

$$\Delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0,$$

то

$$a_{12} = \pm\sqrt{a_{11}a_{22}},$$

поэтому выражения для коэффициентов $\bar{a}_{11}$ и $\bar{a}_{12}$ примут вид

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$

$$= a_{11}\xi_x^2 \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22}}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x \pm \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2$$

и

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$

$$= a_{11}\xi_x\eta_x \pm \sqrt{a_{11}a_{22}}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$

$$= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x \pm \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x \pm \sqrt{a_{22}}\eta_y\right). \qquad (11)$$

В силу (10) $\bar{a}_{11} = 0$, т. е.

$$\sqrt{a_{11}}\xi_x \pm \sqrt{a_{22}}\xi_y = 0,$$

поэтому, согласно (11), $\bar{a}_{12} = 0$.

Заметим, что (аналогично предыдущему случаю) $\bar{a}_{22} \neq 0$. Разделив уравнение (3) на $\bar{a}_{22}$, получаем ***канонический вид уравнения параболического типа***:

$$u_{\eta\eta} + F\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0.$$

в) Уравнение эллиптического типа. В этом случае $\Delta(x, y) < 0$ и уравнения (8)–(9) определяют два комплексно-сопряженных семейства характеристик

$$\xi(x, y) \pm i\eta(x, y) = C.$$

Выберем $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ в качестве новых координат и преобразуем уравнение (1) к этим координатам. Мы получим уравнение вида (3), причем

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}, \quad \bar{a}_{12} = 0.$$

Действительно, в силу леммы, функция $\xi(x, y) \pm i\eta(x, y)$ удовлетворяет вспомогательному уравнению (5), т. е.

$$a_{11}\left(\xi(x, y) \pm \eta(x, y)\right)_x^2 + 2a_{12}\left(\xi(x, y) \pm \eta(x, y)\right)_x\left(\xi(x, y) \pm \eta(x, y)\right)_y +$$

$$+ a_{22}\left(\xi(x, y) \pm \eta(x, y)\right)_y^2 = 0$$

или

$$\left(a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\right)-\left(a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\right)\pm$$
$$\pm 2i\left(a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+a_{22}\xi_y\eta_y\right)=0,$$

то есть

$$\overline{a}_{11}-\overline{a}_{22}\pm 2i\,\overline{a}_{12}=0.$$

Отсюда и получаем, что $\overline{a}_{11}=\overline{a}_{22}$, $\overline{a}_{12}=0$. Разделив уравнение (3) на ненулевой коэффициент $\overline{a}_{11}$, получаем ***канонический вид уравнения эллиптического типа***:

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+F\left(\xi,\ \eta,\ u,\ u_\xi,\ u_\eta\right)=0.$$

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Решение. Поскольку

$$a_{11}=x^2,\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=-y^2,$$

то

$$\Delta(x,\ y)=x^2y^2>0,$$

поэтому мы имеем уравнение гиперболического типа.

Уравнение характеристик имеет вид

$$x^2dy^2-y^2dx^2=0$$

или

$$(x\,dy+y\,dx)(x\,dy-y\,dx)=0,$$

которое распадается на два дифференциальных уравнения:

$$x\,dy+y\,dx=0$$

и

$$x\,dy - y\,dx = 0.$$

Они определяют два семейства характеристик:

$$xy = C \text{ и } \frac{y}{x} = C$$

(проверьте самостоятельно!).

Введем новые переменные

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}$$

и выразим частные производные функции u по переменным x, y через частные производные по переменным ξ, η:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} y - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{y^2}{x^4} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{y}{x^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{1}{x^2}.$$

Подставив в исходное дифференциальное уравнение найденные выражения, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{xy} = 0$$

или

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2\xi} u_\eta.$$

Пример 2. Найти области гиперболичности, параболичности и эллиптичности для уравнения

$$\left(x^2 - 1\right) u_{xx} + 2xy u_{xy} + \left(y^2 - 1\right) u_{yy} + \sin\left(u_x + u_y\right) = 0.$$

Решение. Находим дискриминант характеристического уравнения

$$\Delta = x^2y^2 - \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right) = 1 - x^2 - y^2.$$

Следовательно, область гиперболичности

$$1 - x^2 - y^2 > 0,$$

область параболичности

$$1 - x^2 - y^2 = 0,$$

область эллиптичности

$$1 - x^2 - y^2 < 0.$$

Пример 3. Решить задачу Коши

$$xu_{xx} + (x+y)\,u_{xy} + yu_{yy} = 0,$$

$$u\Big|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, \quad x > 0,$$

$$u_x\Big|_{y=\frac{1}{x}} = 2x^2, \quad x > 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$x\,dy^2 - \left(x+y\right)dx\,dy + y\,dx^2 = 0.$$

Его решение

$$\left[\begin{array}{l} y = x + C, \\ y = Cx. \end{array}\right.$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Преобразуя исходное уравнение, получим

$$\xi u_{\xi\eta} - u_\eta = 0,$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_\eta}{u_\eta} = \dfrac{1}{\xi}\partial\xi, \\ u_\eta = 0, \end{array}\right.$$

или

$$u_\eta = \tilde{\Phi}_1(\eta)\xi,$$

$$u = \Phi_1(\eta)\xi + \Phi_2(\xi).$$

Итак, общее решение уравнения имеет вид

$$u(x, y) = \Phi_1\left(\frac{y}{x}\right)(y - x) + \Phi_2(y - x).$$

Из начальных условий имеем:

$$\begin{cases} \Phi_1\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x} - x\right) + \Phi_2\left(\dfrac{1}{x} - x\right) = x^3, \\ -\dfrac{1}{x^3}\Phi_1'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x} - x\right) - \Phi_1\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \Phi_1'\left(\dfrac{1}{x} - x\right) = 2x^2. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение по x и складывая со вторым уравнением, почленно умноженным на $-\left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right)$, получим:

$$\Phi_1'\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x^6\left(2 - x^2\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2},$$

откуда

$$\Phi_1'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(1 - t)^2},$$

$$\Phi_1(t)=\frac{1}{t(t+1)}+C,$$

следовательно

$$\Phi_2\left(\frac{1}{x}-x\right)=C\left(x-\frac{1}{x}\right),$$

$$\Phi_2(t)=-Ct.$$

В итоге имеем:

$$u(x,\,y)=\frac{1}{\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}-1\right)}(y-x)+C(y-x)-C(y-x)=\frac{x^2}{y}.$$

Ответ: $u(x,\,y)=\dfrac{x^2}{y}$.

§ 3. Формула Даламбера

Найдем общее решение задачи Коши для выведенного в предыдущей лекции уравнения свободных колебаний струны, состоящей в отыскании решения уравнения

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \tag{12}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x,\,t)\big|_{t=0}=\varphi(x), \tag{13}$$

$$u_t(x,\,t)\big|_{t=0}=\psi(x). \tag{14}$$

Сначала приведем уравнение (12), относящееся к гиперболическому типу (проверьте самостоятельно!), к каноническому виду, для чего составим характеристическое уравнение

$$dx^2-a^2dt^2=0.$$

Его решения образуют два семейства характеристик:

$$x+at=C_1,$$

$$x-at=C_2.$$

Введем новые координаты

$$\xi=x+at, \quad \eta=x-at,$$

в которых уравнение (12) примет канонический вид

$$u_{\xi\eta}=0.$$

Интегрируя это уравнение по η, получаем

$$u_\xi=F_1(\xi);$$

интегрируя полученное уравнение по ξ, находим:

$$u(\xi,\eta)=\int F_1(\xi)d\xi+f_2(\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta),$$

т. е. общее решение волнового уравнения (12) имеет вид

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at). \tag{15}$$

Функции f_1 и f_2 определим из начальных условий:

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x), \tag{16}$$

$$f_1'(x)-f_2'(x)=\frac{1}{a}\psi(x). \tag{17}$$

Интегрируя уравнение (17) по x, получаем

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_0^x\psi(\alpha)d\alpha+C.$$

Прибавляя и вычитая полученное уравнение к уравнению (16), получаем:

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\alpha)d\alpha+\frac{C}{2},$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\alpha)d\alpha-\frac{C}{2}.$$

Подставляя полученные соотношения в (15), получаем искомое решение задачи Коши:

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha. \qquad (18)$$

Формула (18) носит название ***формула Даламбера***; она была впервые выведена французским математиком Ж. Даламбером в работе «Теория колебаний струн» (1747).

§ 4. Формула Даламбера для полубесконечной струны

Формула Даламбера позволяет решить задачу о колебании ***полубесконечной струны***, т. е. струны, заданной на полупрямой $0 \le x < \infty$. Рассмотрим три случая: конец струны закреплен, конец струны движется по заданному закону, конец струны свободен.

1. Закрепленный конец струны.

Требуется найти функцию $u(x,\ t)$, определенную при $0 \le x < \infty$, $t \ge 0$, и удовлетворяющую волновому уравнению (12), начальным условиям (13) и (14), а также ***краевому условию***

$$u(0,\ t)=0. \qquad (19)$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены при $x \ge 0$, причем

$$\varphi(0)=\psi(0)=0.$$

Продолжим их нечетным образом на всю ось $-\infty \le x < +\infty$, т. е. определим функции $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\psi}(x)$, такие, что

$$\overline{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x \ge 0,\\ -\varphi(-x), & x \le 0,\end{cases} \qquad (20)$$

$$\overline{\psi}(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0,\\ -\psi(-x), & x\leq 0.\end{cases} \tag{21}$$

Тогда решение рассматриваемой задачи определяется формулой

$$u(x,\ t)=\frac{\overline{\varphi}(x+at)+\overline{\varphi}(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\overline{\psi}(\alpha)d\alpha. \tag{22}$$

Функция $u(x,\ t)$, определенная формулой (22) при $0\leq x<\infty$, $t\geq 0$, очевидно, удовлетворяет волновому уравнению (12) и начальным условиям (13)–(14) (по определению функций $\overline{\varphi}(x)$ и $\overline{\psi}(x)$). Она удовлетворяет и краевому условию (19), поскольку

$$u(0,\ t)=\frac{\overline{\varphi}(at)+\overline{\varphi}(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at}\overline{\psi}(\alpha)d\alpha.$$

Первое слагаемое равно нулю в силу (20), а второе равно нулю в силу (21) как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно нуля отрезку.

2. Заданное движение конца струны.

Требуется найти функцию $u(x,\ t)$, определенную при $0\leq x<\infty$, $t\geq 0$, и удовлетворяющую волновому уравнению (12), начальным условиям (13) и (14), а также ***краевому условию***

$$u(0,\ t)=\mu(t). \tag{23}$$

Функция $\mu(t)$ определена при $t\geq 0$, причем

$$\mu(0)=\mu'(0)=0.$$

Продолжим ее на всю ось t, положив

$$\overline{\mu}(t)=\begin{cases}\mu(t), & t\geq 0,\\ 0, & t\leq 0.\end{cases} \tag{24}$$

Тогда решение рассматриваемой задачи определяется формулой

$$u(x,\ t)=\overline{\mu}\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{\overline{\varphi}(x+at)+\overline{\varphi}(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\overline{\psi}(\alpha)d\alpha, \tag{25}$$

где функции $\overline{\varphi}(x)$ и $\overline{\psi}(x)$ определены соотношениями (20)–(21), а функция $\overline{\mu}(t)$ — соотношением (24).

Функция $u(x, t)$, определенная формулой (25) при $0 \le x < \infty$, $t \ge 0$, удовлетворяет волновому уравнению (12), начальным условиям (13)–(14) и краевому условию (23) (проверьте самостоятельно!).

3. Свободный конец струны.

В этом случае конец струны может свободно перемещаться перпендикулярно оси Ox, следовательно, искомая функция $u(x, t)$, определенная при $0 \le x < \infty$, $t \ge 0$, должна удовлетворять волновому уравнению (12), начальным условиям (13) и (14), а также ***краевому условию***

$$u_x(0, t) = 0. \tag{26}$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены при $x \ge 0$, причем

$$\varphi_x(0) = \psi_x(0) = 0.$$

Продолжим их четным образом на всю ось $-\infty \le x < +\infty$, т. е. определим функции $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\psi}(x)$, такие, что

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \ge 0, \\ \varphi(-x), & x \le 0, \end{cases} \tag{27}$$

$$\overline{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \ge 0, \\ \psi(-x), & x \le 0. \end{cases} \tag{28}$$

Тогда решение рассматриваемой задачи определяется формулой

$$u(x, t) = \frac{\overline{\varphi}(x+at) + \overline{\varphi}(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \overline{\psi}(\alpha)\,d\alpha, \tag{29}$$

где функции $\overline{\varphi}(x)$ и $\overline{\psi}(x)$ определены соотношениями (27)–(28).

Функция $u(x, t)$, определенная формулой (29) при $0 \le x < \infty$, $t \ge 0$, очевидно, удовлетворяет волновому уравнению (12) и начальным условиям (13)–(14) (по определению функций $\overline{\varphi}(x)$ и $\overline{\psi}(x)$). Она удовлетворяет и краевому условию (26), поскольку

$$u_x(0, t)=\frac{\tilde{\varphi}_x(at)+\tilde{\varphi}_x(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\tilde{\psi}(at)-\tilde{\psi}(-at)\right).$$

Так как производная четной функции является нечетной функцией, первое слагаемое равно нулю в силу соотношения (27); второе слагаемое равно нулю в силу соотношения (28).

Пример. Точкам полуограниченной струны ($x \geq 0$) с закрепленным концом $x=0$, находящимся в положении равновесия, в начальный момент времени сообщены скорости

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}0, & \text{если } 0 \leq x \leq 2 \text{ и } x \geq 4,\\ 1, & \text{если } 2 < x < 4.\end{cases}$$

Нарисовать форму струны в момент времени $t=\frac{1}{2}$, полагая $a=1$.

Решение. Рассмотрим фиктивную бесконечную струну с начальными условиями, получающимися из начальных условий для полубесконечной струны путем их нечетного продолжения для точек $x<0$. В результате имеем следующие начальные условия для фиктивной бесконечной струны $u_\Phi(x, t)$:

$$\psi(x)=\left.\frac{\partial u_\Phi}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}0, & \text{если } |x| \leq 2 \text{ и } |x| \geq 4,\\ 1, & \text{если } 2 < x < 4,\\ -1, & \text{если } -4 < x < -2.\end{cases}$$

Учитывая отсутствие начальных отклонений, имеем по формуле Даламбера

$$u\left(x, \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}\psi(z)dz.$$

Если $\Phi(z)$ — непрерывная первообразная для функции $\psi(z)$, т. е.

$$\Phi'(z)=\psi(z),$$

то по формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$u\left(x,\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(x+\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right].$$

Для графического решения задачи следует построить график функции $\psi(z)$ а затем построить непрерывную первообразную этой функции — $\Phi(z)$.

Наконец, построив графики $\Phi\left(x+\frac{1}{2}\right)$ и $\Phi\left(x-\frac{1}{2}\right)$, путем сдвига функции $\Phi(x)$ на $\frac{1}{2}$ влево и вправо соответственно, найти их алгебраическую разность, которая для $x \geq 0$ и представит графическую форму струны в момент времени $t=\frac{1}{2}$. На чертежах (рис. 10—13) выполнены эти построения.

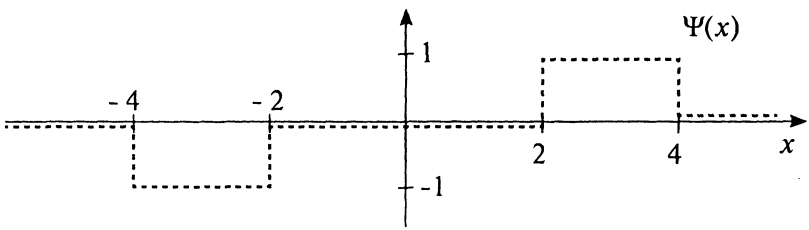

Рис. 10

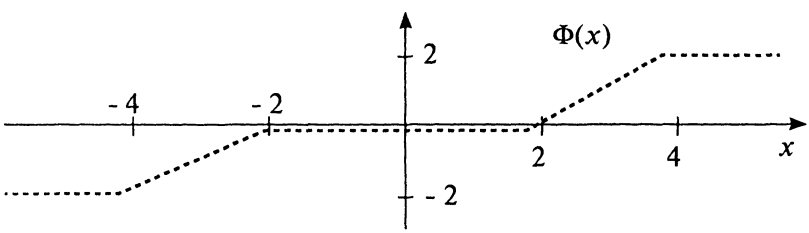

Рис. 11

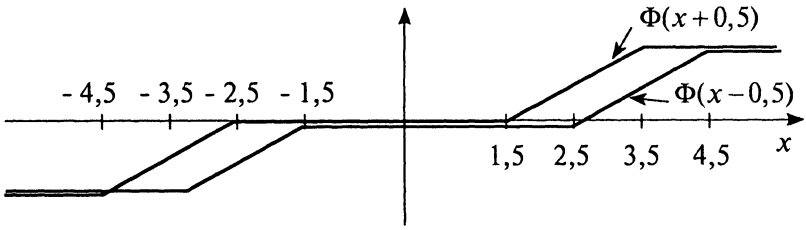

Рис. 12

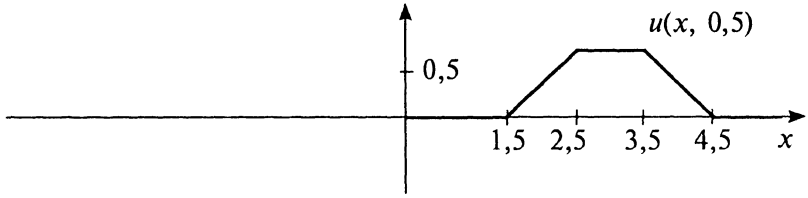

Рис. 13

§ 5. Корректность постановки задачи Коши для волнового уравнения

Задача математической физики называется поставленной корректно, если решение этой задачи удовлетворяет следующим условиям:

1. Решение существует.

2. Решение является единственным.

3. Решение непрерывно зависит от начальных данных и краевых условий.

Примером корректно поставленной задачи Коши является задача Коши для волнового уравнения (12)–(14). Действительно, вывод формулы Даламбера показывает, что решение этой задачи существует и единственно и определяется формулой Даламбера (18).

Проверим выполнение третьего требования. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определяются начальными условиями $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ соответственно. Согласно формуле Даламбера,

$$u_1(x, t)-u_2(x, t)=\frac{\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)}{2}+$$

$$+\frac{\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left(\psi_1(\alpha)-\psi_2(\alpha)\right)d\alpha.$$

Пусть начальные данные достаточно близки:

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\psi_1(x)-\psi_2(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2t}.$$

Тогда

$$\left|u_1(x, t)-u_2(x, t)\right|\le\frac{1}{2}\left|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)\right|+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left|\psi_1(\alpha)-\psi_2(\alpha)\right|d\alpha<$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\frac{\varepsilon}{2t}d\alpha=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2a}\frac{\varepsilon}{2t}2at=\varepsilon.$$

Это и означает непрерывную зависимость решения (18) задачи Коши (12)–(14) от начальных данных.

Пример. Найти решение уравнения

$$u_{tt}=u_{xx},$$

если

$$u(x, t)\big|_{t=0}=x^2,$$

а

$$u_t(x,t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Решение. По условию задачи,

$$a = 1,$$

$$\varphi(x) = x^2,$$

$$\psi(x) = 0.$$

Следовательно, согласно формуле Даламбера,

$$u(x,\ t) = \frac{\varphi(x-t)+\varphi(x+t)}{2} = \frac{(x-t)^2+(x-t)^2}{2} = x^2+t^2.$$

Теорема Фурье является не только одним из самых красивых результатов современного анализа, но, можно сказать, и необходимым инструментом исследования почти каждого непонятного вопроса современной физики.

Уильям Томсон

Глава 12
Метод Фурье

Задача о колебании конечной ненагруженной струны с закрепленными концами. Задача о колебании нагруженной струны с закрепленными концами и нулевыми начальными условиями. Задача о колебании конечной нагруженной струны в общей постановке. Явление резонанса.

Рассмотрим задачу о колебании конечной нагруженной струны длины l с нулевыми начальными условиями в следующей общей постановке.

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \tag{3}$$

Пара начальных условий определяет форму струны и скорости точек струны в начальный момент времени, а пара граничных условий определяет движение концов струны.

Решение этой задачи мы произведем в несколько этапов.

§ 1. Первая краевая задача

Рассмотрим ***первую краевую задачу*** — задачу о колебании конечной ненагруженной струны с закрепленными концами, состоящую в нахождении решения волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{4}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \tag{5}$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \tag{6}$$

Излагаемый ниже метод, получивший название ***метод Фурье***, был разработан и обоснован французским математиком Жаном Фурье в книге «Аналитическая теория тепла» (1822), однако впервые был применен Даниилом Бернулли (1755).

Будем искать всевозможные решения уравнения (1), представимые в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{7}$$

Решения $X(x) \equiv 0$ и $T(t) \equiv 0$ являются тривиальными, поэтому будем в дальнейшем предполагать, что функции $X(x)$ и $T(t)$ не равны тождественно нулю.

Подставляя соотношение (7) в уравнение (4), получим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t). \tag{8}$$

Разделив обе части (8) на $a^2 X(x)T(t)$, приходим к уравнению

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{9}$$

Уравнение (9) представляет собой равенство двух функций, зависящих от разных переменных; это равенство возможно лишь в том случае, когда обе функции — константы:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \tag{10}$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -a^2\lambda. \tag{11}$$

Из краевых условий (6) имеем:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0,$$

откуда, очевидно, следует, что

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Предположим, что $\lambda < 0$. Тогда все решения уравнения (10) имеют вид

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Из условия

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0$$

получаем, что $c_2 = -c_1$, а из условия

$$X(l) = c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}\right) = 0$$

находим, что $c_1 = 0$. Следовательно, $X(x) \equiv 0$, т. е. получили тривиальное решение.

Предположим теперь, что $\lambda = 0$. В этом случае решения уравнения (10) имеют вид

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Из условия $X(0) = 0$ получаем, что $c_2 = 0$; из условия $X(l) = c_1 l = 0$ получаем $c_1 = 0$, следовательно, $X(x) \equiv 0$, т. е. опять получили тривиальное решение. Таким образом, при $\lambda \le 0$ задача не имеет нетривиальных решений.

При $\lambda > 0$ все решения уравнения (10) имеют вид

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Условие $X(0) = 0$ принимает вид

$$c_1 = 0,$$

а условие $X(l) = 0$ — вид

$$c_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Если $c_2 = 0$, то имеем тривиальное решение $X(x) \equiv 0$; в ином случае имеем:

$$\sqrt{\lambda}l = \pi n, \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

Таким образом, мы получили счетное множество решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

и, соответственно, счетное множество функций

$$X_n(x) = c_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots \tag{12}$$

Подставляя найденные значения $\lambda = \lambda_n$ в уравнение (11) и находя его общее решение, имеем:

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{\pi n a}{l}t + b_n \sin\frac{\pi n a}{l}t.$$

Таким образом, мы получили множество функций

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n a}{l}t + B_n \sin\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{13}$$

где A_n, B_n — произвольные числа, $n = 1, 2, \ldots$ (мы опускаем случай $n = 0$, дающий тривиальное решение, и все отрицательные значения n за счет произвольности постоянных).

Пусть

$$\delta_n = \operatorname{arctg}\left(-\frac{B_n}{A_n}\right),$$

тогда

$$\sin\delta_n = -\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}, \quad \cos\delta_n = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$$

и формула (13) принимает вид

$$u_n(x, t) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\left(\cos\delta_n \cos\frac{\pi n a}{l}t - \sin\delta_n \sin\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

или

$$u_n(x, t) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\cos\left(\frac{\pi n a}{l}t + \delta_n\right)\sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (14)$$

Функции $u_n(x, t)$ называются ***стоячими волнами***. Точки

$$x_k = \frac{kl}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

называются ***узлами*** стоячей волны, а точки

$$x_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{n}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1$$

называются ***пучностями*** стоячей волны.

График стоячей волны (14) в каждый фиксированный момент времени t пропорционален синусоиде $\sin\frac{\pi n}{l}x$. Очевидно, что в узлах x_k имеем

$$\sin\left(\frac{\pi n}{l}\frac{kl}{n}\right) = \sin\pi k = 0,$$

следовательно, $u_n(x_k, t) \equiv 0$. В пучностях x_m находим

$$\sin\frac{\pi n}{l}\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{l}{n} = \sin\pi\left(m + \frac{1}{2}\right) = (-1)^m,$$

поэтому функция $u_n(x, t)$ в пучностях x_m принимает наибольшее (по модулю) значение.

Напомним, что частота колебаний ω связана с периодом колебаний T соотношением $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Функция $u_n(x, t)$ при фиксированном x осуществляет гармонические колебания по t вида $A\cos(\omega_n t + \delta_n)$ с частотой

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l},$$

которая называется ***собственной частотой колебаний*** струны. Частота

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l}$$

называется ***основной частотой колебаний*** струны.

Нетрудно видеть, что амплитуда колебаний

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2}\left|\sin\frac{\pi n}{l}x\right|$$

максимальна в пучностях x_m и равна нулю в узлах x_k.

Функции $u_n(x, t)$ называются ***собственными функциями*** рассматриваемой задачи. Каждая из них является решением уравнения (4), удовлетворяющим краевым условиям (6). Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi n a}{l}t + B_n\sin\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (15)$$

и поищем A_n, B_n такие, чтобы удовлетворить начальным условиям (5).

Предположим, что ряд (15) и ряды, полученные из него почленным двукратным дифференцированием по x и по t сходятся. Тогда ряд (15), очевидно, удовлетворяет волновому уравнению (4), а также краевым условиям (6).

Начальные условия (5) принимают вид

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x), \qquad (16)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n a}{l}B_n\sin\frac{\pi n a}{l}x = \psi(x). \qquad (17)$$

Предположим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ разложены в сходящиеся ряды Фурье по синусам кратных дуг на отрезке $[0, l]$, т. е.

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{18}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{19}$$

где, как известно, коэффициенты Фурье φ_n и ψ_n определяются по формулам

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx, \tag{20}$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx. \tag{21}$$

Сопоставляя разложения (16)–(17) и (18)–(19) и приравнивая коэффициенты при синусах одинаковых аргументов, получаем

$$A_n=\varphi_n, \quad B_n=\frac{l}{\pi n a}\psi_n. \tag{22}$$

Таким образом, если решение задачи о колебании конечной закрепленной струны представимо рядом (15), то коэффициенты этого ряда определяются формулами (20)–(22).

Для обоснования применимости метода Фурье необходимо указать условия, при которых ряд (15) является сходящимся и определяет функцию $u(x, t)$, дважды дифференцируемую по x и по t, и удовлетворяющую волновому уравнению (4).

Теорема. *Пусть функция $\varphi(x)$ имеет ограниченную четвертую производную*

$$\left|\varphi^{IV}(x)\right|<C,$$

а функция $\psi(x)$ — ограниченную третью производную:

$$\left|\psi^{III}(x)\right|<C.$$

Тогда ряд Фурье (15), (22) и ряды, полученные из него двукратным дифференцированием по x и по t, сходятся абсолютно и равномерно.

Доказательство. Как известно из теории рядов Фурье, если функция $f(x)$ имеет ограниченную производную k-го порядка:

$$\left|f^{(k)}(x)\right|<C,$$

для ее коэффициентов Фурье справедливы оценки:

$$|a_n|<\frac{2C}{n^k},\quad |b_n|<\frac{2C}{n^k}.$$

Следовательно,

$$|\varphi_n|<\frac{2C}{n^4},\quad |\psi_n|<\frac{2C}{n^3}.$$

Отсюда, с учетом (22),

$$|A_n|<\frac{2C}{n^4},\quad |B_n|<\frac{2lC}{\pi a n^4}.$$

Тогда ряд (15), (22) мажорируется сходящимся числовым рядом с общим членом

$$\left|\left(A_n\cos\frac{\pi n a}{l}t+B_n\sin\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x\right|<|A_n|+|B_n|<\left(1+\frac{l}{\pi a}\right)\frac{2C}{n^4},$$

а, следовательно, сходится равномерно и абсолютно при всех $0\le x\le l$ и $t\ge 0$.

Ряды, полученные двукратным дифференцированием ряда (15), (22) по x и по t, имеют вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\left(A_n\cos\frac{\pi n a}{l}t+B_n\sin\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{23}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\left(A_n\cos\frac{\pi n a}{l}t+B_n\sin\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{24}$$

соответственно.

Ряды (23)–(24) мажорируются сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}2C\left(1+\frac{l}{\pi a}\right)\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{n^2}$$

(проверьте самостоятельно!). Поэтому ряды (23)–(24) сходятся равномерно и абсолютно.

Почленное двукратное интегрирование ряда (23) по t и ряда (24) по x, в силу их равномерной сходимости, перестановочно с суммированием и приводит к ряду (15). Следовательно, сумма ряда (23) есть функция $u_{xx}(x, t)$, а сумма ряда (24) есть функция $u_{tt}(x, t)$.

Из (23)–(24), очевидно вытекает, что

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Струна, закрепленная в концах $x = 0$, $x = 2$ в начальный момент времени имеет форму параболы

$$u(x, 0) = 2x - x^2,$$

причем начальные скорости точек струны отсутствуют. Найти смещение точек струны от положения равновесия, полагая $a = 1$.

Решение. Будем искать решение волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{xx}$$

при краевых условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = 2x - x^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 0.$$

Решение имеет вид

$$u = T(t)T(x),$$

причем

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Характеристические уравнения, отвечающие этим уравнениям одинаковы:

$$k^2 + \lambda^2 = 0,$$

откуда

$$k = \pm i\lambda.$$

Тогда общее решение этих уравнений имеет вид

$$T(t) = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t,$$

$$X(x) = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x,$$

откуда

$$u(x, t) = (A\cos\lambda t + B\sin\lambda t)(C\cos\lambda x + D\sin\lambda x).$$

Полученная функция должна удовлетворять краевому условию

$$u(0, t) = 0,$$

то есть

$$(A\cos\lambda t + B\sin\lambda t)(C\cos\lambda x + D\sin\lambda x)\Big|_{x=0} = 0,$$

откуда

$$C = 0,$$

поэтому

$$u(x, t) = (AD\cos\lambda t + BD\sin\lambda t)\sin\lambda x.$$

Обозначим

$$AD = \overline{A}, \quad BD = \overline{B},$$

тогда из краевого условия

$$u(2,\ t)=0$$

имеем

$$\left(\bar{A}\cos\lambda t+\bar{B}\sin\lambda t\right)\sin 2\lambda=0,$$

откуда

$$\sin 2\lambda=0$$

или

$$\lambda=\frac{\pi k}{2},\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Каждому значению k отвечает значение $\lambda=\lambda_k$ и поэтому соответствующее частное решение u_k имеет вид

$$u_k(x,\ t)=\left(a_k\cos\frac{\pi kt}{2}+b_k\sin\frac{\pi kt}{2}\right)\sin\frac{\pi k}{2}x,$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные. Сумма ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi k}{2}t+b_k\sin\frac{\pi k}{2}t\right)\sin\frac{\pi k}{2}x$$

удовлетворяет исходному уравнению и краевым условиям.

Подберем коэффициенты a_k и b_k так, чтобы эта сумма удовлетворяла и начальным условиям. Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi k}{2}a_k\sin\frac{\pi k}{2}t+\frac{\pi k}{2}b_k\cos\frac{\pi k}{2}t\right)\sin\frac{\pi k}{2}x,$$

то, полагая $t=0$ в этих равенствах, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\frac{\pi k}{2}\cos\frac{\pi k}{2}x=0$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{\pi k}{2}x=2x-x^2.$$

Эти соотношения дают разложение в ряды Фурье по синусам кратных дуг функций

$$\varphi(x) = 2x - x^2$$

и

$$\psi(x) = 0.$$

Тогда коэффициенты Фурье a_k находятся по формуле

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 \left(2x - x^2\right)\sin\frac{\pi k}{2}x\,dx,$$

а коэффициенты Фурье для функции, тождественно равной нулю, должны быть равны нулю:

$$\frac{\pi k}{2}b_k = 0,$$

откуда

$$b_k = 0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Нетрудно подсчитать, что

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 \left(2x - x^2\right)\sin\frac{\pi k}{2}x\,dx =$$

$$= \left(2x - x^2\right)\left(-\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2}x\right)\Bigg|_0^2 + \frac{4}{\pi k}\int_0^2 (1 - x)\cos\frac{\pi k}{2}x\,dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{32}{k^3\pi^3}, & k = 2n+1, \\ 0, & k = 2n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = \frac{32}{(2n-1)^3}\pi^3.$$

Окончательно имеем

$$u(x,t)=\frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\frac{2n-1}{2}\pi t\sin\frac{2n-1}{2}\pi x.$$

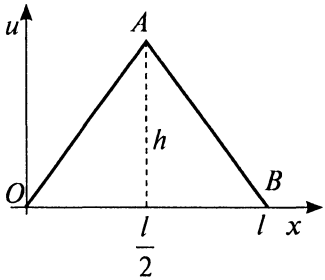

Рис. 14

Пример 2. Дана струна, закрепленная на концах $x=0$, $x=l$. Пусть в начальный момент времени форма струны имеет вид ломанной OAB, изображенной на рис. 14. Найти форму струны для любого момента времени, если

$$\psi(x)=\begin{cases}2\alpha x, & 0\le x\le\dfrac{l}{2},\\ 2\alpha(l-x), & \dfrac{l}{2}<x\le l.\end{cases}$$

Решение. Из рисунка и условия задачи имеем

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x, & 0\le x\le\dfrac{l}{2},\\ \dfrac{2h}{l}(l-x), & \dfrac{l}{2}\le x\le l.\end{cases}$$

Тогда

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx=\frac{4h}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{\pi kx}{l}dx+\frac{4h}{l^2}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx.$$

Интеграл $\int x\sin\frac{\pi kx}{l}dx$ берем по частям:

$$\int x\sin\frac{\pi kx}{l}dx=\begin{vmatrix}u=x & dv=\sin\dfrac{\pi kx}{l}dx\\ du=dx & v=-\dfrac{l}{\pi k}\cos\dfrac{\pi kx}{l}\end{vmatrix}=$$

$$= -\frac{l}{\pi k} x \cos\frac{\pi k x}{l} + \int \frac{l}{\pi k} \cos\frac{\pi k x}{l} dx =$$

$$= -\frac{l}{k\pi} x \cos\frac{\pi k x}{l} + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin\frac{\pi k x}{l}.$$

Итак,

$$a_k = \frac{4h}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin\frac{\pi k x}{l} dx + \frac{4h}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l} \sin\frac{\pi k x}{l} dx - \frac{4h}{l^2}\int_{\frac{l}{2}}^{l} x \sin\frac{\pi k x}{l} dx,$$

или, окончательно,

$$a_k = \frac{8h}{\pi^2 k^2} \sin\frac{\pi k}{2}.$$

Далее, аналогично находим

$$b_k = \frac{2}{\pi k a}\int_0^l \psi(x) \sin\frac{\pi k x}{l} dx = \frac{4\alpha}{\pi k a}\int_0^{l/2} \sin\frac{\pi k x}{l} dx +$$

$$+ \frac{4\alpha}{k\pi a}\int_{\frac{l}{2}}^{l} (l - x) \sin\frac{\pi k x}{l} dx = \frac{4\alpha}{k\pi a}\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin\frac{\pi k x}{l} dx +$$

$$+ \frac{4\alpha l}{\pi k a}\int_{\frac{l}{2}}^{l} \sin\frac{\pi k x}{l} dx - \frac{4\alpha}{k\pi a}\int_{\frac{l}{2}}^{l} \sin\frac{\pi k x}{l} dx.$$

Окончательно получим

$$b_k = \frac{8al^2}{\pi^3 k^3 \alpha} \sin\frac{\pi k}{2}.$$

Таким образом, искомая функция имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{h}{k^2}\cos\frac{\pi k a t}{l} + \frac{al^2}{k^3}\sin\frac{\pi k a t}{l}\right)\sin\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi k x}{l}.$$

§ 2. Вторая краевая задача

Рассмотрим ***вторую краевую задачу*** — задачу о колебании конечной нагруженной струны с закрепленными концами и нулевыми начальными условиями, состоящую в нахождении решения волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \tag{25}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \tag{26}$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \tag{27}$$

Будем искать решение этой задачи в виде ряда Фурье по синусам кратных дуг:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{28}$$

Очевидно,

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin 0 \equiv 0,$$

$$u(l, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \pi n \equiv 0.$$

Условия (26) приводят к соотношениям:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0.$$

Из единственности разложения функций $u(x, 0)$ и $u_t(x, 0)$ в ряд Фурье, имеем:

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0. \tag{29}$$

Разложим функцию $f(x, t)$ на отрезке $[0, l]$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг:

$$f(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{30}$$

где

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x, t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

Подставляя ряды (28) и (30) в уравнение (25) и приравнивая коэффициенты при функциях $\sin\frac{\pi n}{l}x$, получим счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$T_n''(t)+\omega_n^2 T_n(t)=f_n(t), \tag{31}$$

где $\omega_n=\frac{\pi n a}{l}$, $n=1, 2, \ldots$, с начальными условиями (29).

Мы получили задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, которое, как мы знаем, имеет единственное решение; оно имеет вид

$$T_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\left(\omega_n(t-\tau)\right)f_n(\tau)\,d\tau. \tag{32}$$

Действительно,

$$T_n'(t)=\int_0^t \cos\left(\omega_n(t-\tau)\right)f_n(\tau)\,d\tau,$$

$$T_n''(t)=-\omega_n\int_0^t \sin\left(\omega_n(t-\tau)\right)f_n(\tau)\,d\tau+f_n(t)=-\omega_n^2 T_n(t)+f_n(t).$$

Таким образом, решение второй краевой задачи (25)–(27) имеет вид ряда (28), где функции $T_n(t)$ определяются формулами (32).

§ 3. Краевая задача в общей постановке

Рассмотрим краевую задачу (1)–(3) в общей постановке. Решение этой задачи будем искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) + z(x, t), \tag{33}$$

где функция $v(x, t)$ определена формулой

$$v(x, t) = \mu_1(t)\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \mu_2(t)\frac{x}{l}.$$

Заметим, что

$$v(0, t) = \mu_1(t),$$

$$v(l, t) = \mu_2(t).$$

Функция $w(x, t)$ определяется по методу Фурье как решение первой краевой задачи:

$$w_{tt} = a^2 w_{xx},$$

$$w(x, 0) = \varphi(x) - v(x, 0), \quad w_t(x, 0) = \psi(x) - v_t(x, 0),$$

$$w(0, t) = w(l, t) = 0.$$

Метод решения этой задачи был разобран выше.

Функция $z(x, t)$ определяется как решение второй краевой задачи:

$$z_{tt} = a^2 z_{xx} + \left(f(x, t) - v_{tt} + a^2 v_{xx}\right),$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z_t(x, 0) = 0,$$

$$z(0, t) = 0, \quad z(l, t) = 0.$$

Метод решения этой задачи был также разобран выше.

Покажем, что функция $u(x, t)$, определенная соотношением (33), удовлетворяет условиям (2)–(3) и является решением уравнения (1). Действительно,

$$u(0, t) = v(0, t) + w(0, t) + z(0, t) = \mu_1(t) + 0 + 0 = \mu_1(t),$$

$$u(l,\ t)=v(l,\ t)+w(l,\ t)+z(l,\ t)=\mu_2(t)+0+0=\mu_2(t),$$

$$u(x,\ 0)=v(x,\ 0)+w(x,\ 0)+z(x,\ 0)=$$

$$=v(x,\ 0)+\varphi(x)-v(x,\ 0)+0=\varphi(x),$$

$$u_t(x,\ 0)=v_t(x,\ 0)+w_t(x,\ 0)+z_t(x,\ 0)=$$

$$=v_t(x,\ 0)+\psi(x)-v_t(x,\ 0)+0=\psi(x),$$

т. е. выполнены условия (2)–(3).

Наконец,

$$u_{tt}=v_{tt}+w_{tt}+z_{tt}=v_{tt}+a^2w_{xx}+a^2z_{xx}+f(x,\ t)-v_{tt}+a^2v_{xx}=$$

$$=a^2(v_{xx}+w_{xx}+z_{xx})+f(x,\ t)=a^2u_{xx}+f(x,\ t),$$

т. е. функция $u(x,\ t)$ является решением уравнения (1). Таким образом, задача (1)–(3) полностью решена.

§ 4. Явление резонанса

Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях ненагруженной струны, правый конец которой подвергается периодическому воздействию внешней силы. Она состоит в нахождении решения волнового уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \tag{34}$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$u(0,\ t)=0,\quad u(l,\ t)=A\cos\omega t, \tag{35}$$

где $A=\text{const}$, при произвольных начальных условиях.

Решение этой задачи может быть найдено вышеописанным методом. Оказывается, что при $t\to\infty$ решение рассматриваемой задачи асимптотически стремится к функции вида

$$u(x,\ t)=V(x)\cos\omega t, \tag{36}$$

называемому ***предельным решением*** рассматриваемой задачи (проверьте самостоятельно!).

Подставляя формулу (36) в волновое уравнение (34), находим уравнение для функции $V(x)$:

$$V''(x)+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 V(x)=0,$$

общее решение которого имеет вид

$$V(x)=B\sin\frac{\omega}{a}x+C\cos\frac{\omega}{a}x. \qquad (37)$$

Из краевых условий (35) следует, что

$$C=0, \quad B=\frac{A}{\sin\frac{\omega}{a}l},$$

поэтому функция (36) принимает вид

$$u(x,\ t)=A\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega}{a}l}\cos\omega t. \qquad (38)$$

Если частота ω периодического воздействия на правый конец струны стремится к одной из собственных частот колебаний струны:

$$\omega\to\omega_m=\frac{\pi m a}{l},$$

то

$$\sin\frac{\omega}{a}l\to 0.$$

Это означает, что амплитуда колебаний (38) при $\omega\to\omega_m$ неограниченно возрастает. Это явление называется ***резонансом***; в рассмотренном случае резонанс наступает, если частота внешнего воздействия кратна основной частоте колебаний струны

$$\omega_0=\frac{\pi a}{l}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда периодическая сила, воздействующая на правый конец струны с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, разлагается в ряд Фурье вида

$$u(l,\ t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right). \tag{39}$$

В этом случае предельное решение волнового уравнения является суммой ряда из решений, аналогичных (38), и имеет вид

$$u(x,\ t) = \frac{a_0 x}{2l} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right) \frac{\sin \frac{n\omega}{a} x}{\sin \frac{n\omega}{a} l} \tag{40}$$

(покажите самостоятельно!).

Нетрудно видеть, что при этом явление резонанса будет иметь место, если частота ω является рациональной кратной основной частоты колебаний струны $\omega_0 = \frac{\pi a}{l}$, т. е.

$$\omega = \frac{p}{q}\omega_0,$$

где p и q — целые числа.

Действительно, при $\omega \to \frac{p}{q}\omega_0$ в ряде (40) знаменатели вида

$$\sin k \frac{q\omega}{a} l, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

стремятся к нулю:

$$\sin k \frac{q\omega}{a} l \to \sin k \frac{p\omega_0}{a} l = \sin \pi k p = 0,$$

следовательно, амплитуда колебаний неограниченно возрастает.

Явление резонанса при иной постановке задачи о колебаниях конечной закрепленной струны при воздействии на нее внешней силы может быть исследовано аналогичным способом.

Пример 1. Однородная струна длины l, закрепленная на концах, колеблется под действием внешней силы

$$f(x, t) = \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{3\pi t}{l},$$

рассчитанной на единицу длины. Описать поведение струны с течением времени, считая начальные условия нулевыми.

Решение. Требуется найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

при краевых условиях

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

и начальных условиях

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Разлагая функцию $f(x, t)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг, имеем

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x, t)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Тогда решением задачи будет функция $u(x, t)$, представимая в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

где функция $u_n(t)$ является решением уравнения

$$u_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u_n(0) = u_n'(0) = 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$f_1(t)=\sin\frac{3\pi}{l}t,\quad f_2(t)=f_3(t)=\dots=0,$$

следовательно,

$$u_2(t)=u_3(t)=\dots=0,$$

а функция $u_1(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$u_1''(t)+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 u_1(t)=\sin\frac{3\pi t}{l} \tag{41}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u_1(0)=0,\quad u_1'(0)=0.$$

Возможны два следующих случая.

1. Пусть $a\neq 3$. В этом случае частное решение уравнения (41) имеет вид

$$u_{\text{частн}}(t)=A\cos\frac{\pi a t}{l}+B\sin\frac{\pi a t}{l},$$

где коэффициенты A и B определяются из системы

$$\begin{cases}-\dfrac{9\pi^2}{l^2}A+\left(\dfrac{\pi a}{l}\right)^2 A=0,\\[2ex] -\dfrac{9\pi^2}{l^2}B+\left(\dfrac{\pi a}{l}\right)^2 B=1,\end{cases}$$

(проверьте самостоятельно!), откуда

$$A=0,\quad B=\frac{l^2}{\pi^2\left(a^2-9\right)}.$$

Следовательно,

$$u_{\text{частн}}(t)=\frac{l^2}{\pi^2\left(a^2-9\right)}\sin\frac{\pi a t}{l}$$

и общее решение уравнения (41) будет

$$u_1(t)=C_1\cos\frac{\pi a}{l}t+C_2\sin\frac{\pi a}{l}t+\frac{l^2}{\pi^2\left(a^2-9\right)}\sin\frac{3\pi t}{l}.$$

Из начальных условий находим

$$C_1=0,\quad C_2=\frac{3l^2}{\pi^2\left(9-a^2\right)a},$$

значит,

$$u_1(t)=\frac{3l^2}{\pi^2\left(9-a^2\right)a}\sin\frac{\pi a}{l}t+\frac{l^2}{\pi^2\left(a^2-9\right)}\sin\frac{3\pi t}{l}.$$

Окончательно, имеем

$$u(x,\ t)=\frac{l^2}{\pi^2\left(9-a^2\right)a}\left(3\sin\frac{\pi a t}{l}-a\sin\frac{3\pi t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Очевидно, при $t\to\infty$ эта функция остается ограниченной.

2. Рассмотрим теперь случай $a=3$.

Функция $u_1(t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$u_1''+\frac{9\pi^2}{l^2}u_1=\sin\frac{3\pi t}{l} \tag{42}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u_1(0)=u_1'(0)=0.$$

Частное решение уравнения (42) имеет вид

$$u_{\text{частн}}(t)=t\left(A\sin\frac{3\pi t}{l}+B\cos\frac{3\pi t}{l}\right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (42), получим, что

$$A=0,\quad B=-\frac{l}{6\pi}$$

(проверьте самостоятельно!), откуда

$$u_{\text{частн}}(t) = -\frac{l}{6\pi} t \cos\frac{3\pi t}{l}.$$

Тогда общее решение уравнения (42) имеет вид

$$u_1(t) = C_1 \cos\frac{3\pi t}{l} + C_2 \sin\frac{3\pi t}{l} - \frac{l}{6\pi} t \cos\frac{3\pi t}{l}.$$

Из начальных условий имеем:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{l^2}{18\pi^2},$$

то есть

$$u_1(t) = \frac{l^2}{18\pi^2}\left(\sin\frac{3\pi t}{l} - \frac{3\pi}{l} t \cos\frac{3\pi t}{l}\right).$$

Окончательно,

$$u(x, t) = \frac{l^2}{18\pi^2}\left(\sin\frac{3\pi t}{l} - \frac{3\pi}{l} t \cos\frac{3\pi t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}.$$

При $t \to \infty$ эта функция становится неограниченной; в этом случае имеет место явление резонанса.

Пример 2. Решить задачу о колебаниях струны, закрепленной на одном из концов при условии, что другой конец подвергается воздействию периодической силы, вызывающей смещение, равное $A \sin \omega t$. Начальные возмущения отсутствуют.

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Решение задачи ищем в виде

$$u(x,\ t)=v(x,\ t)+w(x,\ t)+z(x,\ t),$$

где

$$v(x,\ t)=\frac{Ax}{l}\sin\omega t,$$

функция $w(x,\ t)$ является решением задачи

$$w_{tt}=a^2 w_{xx},$$

$$w(0,\ t)=0,\quad w(l,\ t)=0,$$

$$w(x,\ 0)=0,\quad w_t(x,\ 0)=-\frac{A\omega}{l}x.$$

Решив эту задачу методом Фурье, находим

$$w(x,t)=\frac{A\omega l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{\pi n a}{l}t\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Функция $z(x,\ t)$ является решением задачи

$$z_{tt}=a^2 z_{xx}+\frac{Ax\omega^2}{l}\sin\omega t,$$

$$z(0,\ t)=z(l,\ t)=0,$$

$$z(x,\ 0)=0,\quad z_t(x,\ 0)=0.$$

Разложив x в ряд Фурье по синусам кратных дуг, получим

$$x=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Тогда

$$z(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}z_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

где $z_n(t)$ — решение уравнения

$$z_n'' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 z_n = \frac{2A\omega^2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\omega t$$

с нулевыми начальными условиями.

Для решения этого уравнения надо рассмотреть два случая.

1. Частота периодического краевого условия не совпадает ни с одной из собственных частот, т. е.

$$\omega \neq \frac{\pi n a}{l}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

В этом случае

$$z_n(t) = \frac{2A\omega^2 l^2 (-1)^{n+1}}{\pi^2 a n\left(\pi^2 n^2 a^2 - l^2\omega^2\right)}\left(\pi n a \sin\omega t - \omega l \sin\frac{\pi n a}{l} t\right).$$

Тогда решение задачи представляется формулой

$$u(x, t) = A\left(\frac{x}{l} + \frac{2\omega^2 l^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\left(\pi^2 n^2 a^2 - \omega^2 l^2\right)}\sin\frac{\pi n x}{l}\right)\sin\omega t +$$

$$+\frac{2A\omega a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2 - \dfrac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}}\sin\frac{\pi n a t}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Первое слагаемое этой суммы может быть преобразовано к более простому виду:

$$u(x, t) = \frac{A\sin\dfrac{\omega x}{a}\sin\omega t}{\sin\dfrac{\omega l}{a}} + \frac{2A\omega a}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \dfrac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}}\sin\frac{\pi n a t}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Заметим, что этот ответ можно получить, если искать решение задачи в виде суммы двух функций:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $w(x, t)$ — решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = A \sin \omega t,$$

а $v(x, t)$ — решение этого же уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0,$$

$$v(x, 0) = -w(x, 0); \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t}.$$

2. Частота периодического краевого условия совпадает с одной из собственных частот, т. е.

$$\omega = \frac{\pi n a}{l}.$$

В этом случае ответ дается той же формулой, что и в первом случае, но в суммах отсутствуют слагаемые u_{n^*}, соответствующие числу

$$n^* = \frac{\omega l}{\pi a},$$

но добавлено решение уравнения

$$z_n'' + \left(\frac{n^* \pi a}{l}\right)^2 z_n = 2A\pi n^* a^2 (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi n^* a}{l} t$$

при нулевых начальных условиях, умноженное на $\sin \frac{\pi n^* x}{l}$, которое равно

$$u(x, t) = \frac{2Al^2 (-1)^{n^*}}{\pi n^*} \left(\sin \frac{\pi n^* a t}{l} - \frac{\pi n^* a t}{l} \cos \frac{\pi n^* a t}{l} \right) \sin \frac{\pi n^*}{l} x.$$

За счет этого слагаемого решение рассматриваемой задачи неограниченно при $t \to \infty$. В этом случае говорят, что колебания струны носят резонансный характер.

Математические доказательства, как алмазы, тверды и прозрачны и поддаются лишь самой строгой логике.

Джон Локк

Глава 13
Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности. Краевые задачи для уравнения теплопроводности. Принцип максимального значения. Корректность постановки задачи Коши для уравнения теплопроводности.

§ 1. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим процесс распространения тепла в тонком стержне. Физическими параметрами, определяющими процесс распространения тепла, являются:

1) температура $u(x, t)$ сечения стержня с координатой x в момент t;

2) коэффициент теплопроводности $k(x)$;

3) плотность источников тепла $F(x, t)$;

4) удельная теплоемкость стержня $c(x)$;

5) линейная плотность массы стержня $\rho(x)$.

Количество тепла dQ_1, протекающее через сечение x стержня за время dt, определяется формулой

$$dQ_1 = -k(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}dt.$$

Знак «минус» $(-)$ отражает тот факт, что тепло перераспределяется от более нагретых частей тела к менее нагретым.

Количество тепла dQ_2, выделившегося на участке стержня длины dx за время dt, определяется формулой

$$dQ_2 = F(x, t)\,dx\,dt.$$

Количество тепла dQ_3, необходимое для нагревания участка стержня длины dx на температуру du, определяется формулой

$$dQ_3 = c(x)\rho(x)\,du\,dx.$$

Пусть функция $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и непрерывно дифференцируема по t, а функции $c(x)$, $\rho(x)$ и $F(x, t)$ непрерывны. Рассмотрим участок стержня $[x_1, x_2]$, ограниченный сечениями x_1 и x_2, и составим уравнение баланса количества тепла, содержащегося внутри него, при изменении времени от t_1 до t_2.

За это время внутрь участка через сечения x_1 и x_2 перетечет тепла

$$\Delta Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left(k(x_2)\frac{\partial u(x_2, t)}{\partial x} - k(x_1)\frac{\partial u(x_1, t)}{\partial x}\right)dt,$$

источники тепла выделят

$$\Delta Q_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x, t)\,dx\,dt,$$

а изменение количества тепла, содержащегося внутри участка стержня $[x_1, x_2]$, за промежуток времени от t_1 до t_2, имеет вид

$$\Delta Q_3 = \int_{x_1}^{x_2} c(x)\rho(x)\big(u(x, t_2) - u(x, t_1)\big)\,dx.$$

Уравнение баланса количества тепла, совпадающее с законом сохранения энергии, имеет вид

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = \Delta Q_3.$$

Таким образом,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(k(x_2)\frac{\partial u(x_2,\ t)}{\partial x}-k(x_1)\frac{\partial u(x_1,\ t)}{\partial x}\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}F(x,\ t)\,dx\,dt=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}c(x)\rho(x)\big(u(x,\ t_2)-u(x,\ t_1)\big)dx$$

или

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right)+F(x,\ t)\right)dt\,dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}c(x)\rho(x)\big(u(x,\ t_2)-u(x,\ t_1)\big)dx.$$

Поскольку полученное равенство справедливо для любого участка стержня $[x_1,\ x_2]$, подынтегральные выражения равны:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right)+F(x,\ t)\right)dt=c(x)\rho(x)\big(u(x,\ t_2)-u(x,\ t_1)\big).$$

Применив к левой части равенства теорему о среднем, получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u(x,\ \xi)}{\partial x}\right)+F(x,\ \xi)\right)(t_2-t_1)=c(x)\rho(x)\big(u(x,\ t_2)-u(x,\ t_1)\big),$$

где $t_1\le\xi\le t_2$.

Разделив обе части равенства на t_2-t_1:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u(x,\ \xi)}{\partial x}\right)+F(x,\ \xi)=c(x)\rho(x)\frac{u(x,\ t_2)-u(x,\ t_1)}{t_2-t_1}$$

и переходя к пределу при $t_2 \to t_1$ (очевидно, при этом и $\xi \to t_1$), получим ***уравнение теплопроводности в дифференциальной форме***:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right)+F(x,\ t)=c(x)\rho(x)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}.$$

В дальнейшем будем полагать, что стержень является ***однородным***, т. е.

$$k(x)\equiv k=\text{const},$$

$$c(x)\equiv c=\text{const},$$

$$\rho(x)\equiv \rho=\text{const}.$$

Тогда уравнение теплопроводности примет вид

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,\ t),$$

или же

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t),$$

где

$$a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}},\quad f(x,\ t)=\frac{F(x,\ t)}{c\rho}.$$

Краткая запись уравнения теплопроводности такова:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,\ t). \tag{1}$$

Заметим, что уравнение (1) является уравнением параболического типа (проверьте самостоятельно!) и представлено в каноническом виде.

§ 2. Первая краевая задача

Рассмотрим первую краевую задачу, состоящую в нахождении решения $u(x,\ t)$ однородного уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2u_{xx} \tag{2}$$

на отрезке $0 \le x \le l$ при $t \ge 0$ с начальным условием

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{3}$$

и нулевыми краевыми условиями

$$u(0,\ t) = 0, \quad u(l,\ t) = 0. \tag{4}$$

Решение задачи (2)–(4) представим в виде функции с разделенными переменными

$$u(x,\ t) = X(x)T(t). \tag{5}$$

Очевидно, что функции $X(x) \equiv 0$ и $T(t) \equiv 0$ дают тривиальное решение, поэтому будем в дальнейшем предполагать, что функции $X(x)$ и $T(t)$ не равны тождественно нулю.

Подставляя соотношение (5) в уравнение (2), получим

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t). \tag{6}$$

Разделив обе части уравнения (6) на $a^2 X(x)T(t)$, приходим к уравнению

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{7}$$

Уравнение (7) представляет собой равенство двух функций, зависящих от разных переменных; это равенство возможно лишь в том случае, когда обе функции — константы:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \tag{8}$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -a^2\lambda. \tag{9}$$

Из краевых условий (4) имеем:

$$u(0,\ t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l,\ t) = X(l)T(t) = 0,$$

откуда, очевидно, следует, что

$$X(0)=0,\ X(l)=0.$$

Предположим, что $\lambda<0$. Тогда все решения уравнения (7) имеют вид

$$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Из условия

$$X(0)=c_1+c_2=0$$

получаем, что $c_2=-c_1$, а из условия

$$X(l)=c_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}l}-e^{-\sqrt{-\lambda}l}\right)=0$$

находим, что $c_1=0$. Следовательно, $X(x)\equiv 0$, т. е. получили тривиальное решение.

Предположим теперь, что $\lambda=0$. В этом случае решения уравнения (7) имеют вид

$$X(x)=c_1x+c_2.$$

Из условия $X(0)=0$ получаем, что $c_2=0$; из условия $X(l)=c_1l=0$ получаем $c_1=0$, следовательно, $X(x)\equiv 0$, т. е. опять получили тривиальное решение. Таким образом, при $\lambda\le 0$ задача не имеет нетривиальных решений.

При $\lambda>0$ все решения уравнения (10) имеют вид

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Условие $X(0)=0$ принимает вид

$$c_1=0,$$

а условие $X(l)=0$ — вид

$$c_2\sin\sqrt{\lambda}l=0.$$

Если $c_2 = 0$, то имеем тривиальное решение $X(x) \equiv 0$; в ином случае имеем:

$$\sqrt{\lambda} l = \pi n, \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

Таким образом, мы получили счетное множество решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

и, соответственно, счетное множество функций

$$X_n(x) = c_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots \tag{10}$$

Подставляя найденные значения $\lambda = \lambda_n$ в уравнение (9) и находя его общее решение, имеем:

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

Таким образом, мы получили множество функций

$$u_n(x, t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{11}$$

где A_n — произвольные числа, $n = 1, 2, \ldots$ (мы опускаем случай $n = 0$, дающий тривиальное решение, и все отрицательные значения n за счет произвольности постоянных).

Найденные функции $u_n(x, t)$ называются ***собственными функциями*** рассматриваемой задачи. Каждая из них является решением уравнения (2), удовлетворяющим краевым условиям (4). Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{12}$$

и поищем коэффициенты A_n такие, чтобы удовлетворить начальному условию (3).

Предположим, что ряд (12) и ряды, полученные из него почленным двукратным дифференцированием по x и по t сходятся. Тогда ряд (12), очевидно, удовлетворяет уравнению теплопроводности (2), а также краевым условиям (4).

Начальное условие (3) принимает вид

$$u(x,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x=\varphi(x). \tag{13}$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ разложена в сходящийся ряд Фурье по синусам кратных дуг на отрезке $[0,\ l]$, т. е.

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{14}$$

где, как известно, коэффициенты Фурье φ_n определяются по формулам

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx. \tag{15}$$

Сопоставляя разложения (13) и (14) и приравнивая коэффициенты при синусах одинаковых аргументов, получаем

$$A_n=\varphi_n. \tag{16}$$

Таким образом, если решение рассматриваемой задачи представимо рядом (12), то коэффициенты этого ряда определяются формулами (15)–(16).

Теорема. *Если функция* $\varphi(x)$ *ограничена на отрезке* $[0,\ l]$, *то ряд (12) и ряды, полученные из ряда (12) почленным дифференцированием по x и по t любого порядка, сходятся равномерно при всех* $t\ge t_0>0$ *и всех* $0\le x\le l$, *где* t_0 *— любое положительное число.*

Доказательство. Пусть

$$|\varphi(x)|<C.$$

Тогда

$$|A_n|=|\varphi_n(x)|=\frac{2}{l}\left|\int_0^l \phi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx\right|\le$$

$$\le\frac{2}{l}\int_0^l|\varphi(x)|\left|\cos\frac{\pi nx}{l}\right|dx\le\frac{2}{l}\int_0^l C\,dx=\frac{2}{l}Cl=2C.$$

При этом (проверьте самостоятельно!)

$$\left|\frac{\partial^{m+k}u_n(x,\,t)}{\partial x^m\partial t^k}\right| \le 2C\left(\frac{\pi n}{l}\right)^m\left(\frac{\pi na}{l}\right)^{2k} e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t} \le \bar{C}n^{m+2k}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t_0},$$

где

$$\bar{C} = 2C\left(\frac{\pi}{l}\right)^{m+2k} a^{2k}.$$

Следовательно, функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^{m+k}u_n(x,\,t)}{\partial x^m\partial t^k} \tag{17}$$

мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bar{C}n^{m+2k}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t_0}.$$

Нетрудно проверить, что этот ряд является сходящимся. Действительно, по признаку Даламбера,

$$\frac{\bar{C}(n+1)^{m+2k}e^{-\left(\frac{\pi(n+1)a}{l}\right)^2 t_0}}{\bar{C}n^{m+2k}e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t_0}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{m+2k} e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\left((n+1)^2-n^2\right)t_0} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{m+2k} e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2(2n+1)t_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, ряд (17) сходится равномерно при всех $t \ge t_0 > 0$ и всех $0 \le x \le l$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Функция $u(x,\,t)$ является бесконечно дифференцируемой при всех $t \ge t_0 > 0$ и всех $0 \le x \le l$, где t_0 — любое положительное число.*

Теорема. *Если функция* $\varphi(x)$ *имеет ограниченную вторую производную, то ряд (12) равномерно сходится при всех* $t \geq 0$ *и определяет непрерывную при* $t \geq 0$ *функцию.*

Доказательство. Пусть

$$|\varphi''(x)| < C.$$

Как известно из теории рядов Фурье, если функция $f(x)$ имеет ограниченную производную k-го порядка:

$$\left|f^{(k)}(x)\right| < C,$$

для ее коэффициентов Фурье справедливы оценки:

$$|a_n| < \frac{2C}{n^k}, \quad |b_n| < \frac{2C}{n^k}.$$

Таким образом,

$$|A_n| = |\varphi_n(x)| < \frac{2C}{n^2},$$

так что

$$\left| A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x \right| \leq |A_n| < \frac{2C}{n^2}$$

и ряд (12) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2C}{n^2}.$$

Поэтому ряд (12) сходится равномерно при всех $t \geq 0$. **Теорема доказана.**

§ 3. Вторая краевая задача

Рассмотрим вторую краевую задачу — о распространении тепла в однородном стержне при наличии источников тепла, состоящую в нахождении решения уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{18}$$

при краевых условиях

$$u(0,\ t)=0,\ \ u(l,\ t)=0 \tag{19}$$

и начальном условии

$$u(x,\ 0)=0. \tag{20}$$

Будем искать решение этой задачи в виде ряда Фурье по синусам кратных дуг:

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{21}$$

Очевидно,

$$u(0,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin 0\equiv 0,$$

$$u(l,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin \pi n\equiv 0.$$

Условие (20) приводит к соотношению

$$u(x,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=0.$$

Из единственности разложения функции $u(x,\ 0)$ в ряд Фурье, имеем:

$$u_n(0)=0. \tag{22}$$

Разложим функцию $f(x,\ t)$ на отрезке $[0,\ l]$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг:

$$f(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{23}$$

где

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,\ t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

Подставляя ряды (21) и (23) в уравнение (18) и приравнивая коэффициенты при функциях $\sin\frac{\pi n}{l}x$, получим счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_n'(t)+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 u_n(t)=f_n(t) \tag{24}$$

с начальными условиями (22).

Мы получили задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами, которое, как мы знаем, имеет единственное решение. Оно имеет вид

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau \tag{25}$$

(проверьте самостоятельно!).

Таким образом, решение второй краевой задачи (18)–(20) имеет вид ряда (21), где функции $u_n(t)$ определяются формулами (25).

§ 4. Краевая задача в общей постановке

Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности в общей постановке. Требуется найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\ t) \tag{26}$$

при краевых условиях

$$u(0,\ t)=\mu_1(t),\ \ u(l,\ t)=\mu_2(t), \tag{27}$$

и начальном условии

$$u(x,\ 0)=\varphi(x). \tag{28}$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$u(x,\ t)=v(x,\ t)+w(x,\ t)+z(x,\ t), \tag{29}$$

где функция $v(x, t)$ определена формулой

$$v(x, t)=\mu_1(t)\left(1-\frac{x}{l}\right)+\mu_2(t)\frac{x}{l}.$$

Заметим, что

$$v(0, t)=\mu_1(t),$$

$$v(l, t)=\mu_2(t).$$

Функция $w(x, t)$ определяется по методу Фурье как решение первой краевой задачи:

$$w_t=a^2 w_{xx},$$

$$w(x, 0)=\varphi(x)-v(x, 0),$$

$$w(0, t)=w(l, t)=0.$$

Метод решения этой задачи был разобран выше.

Функция $z(x, t)$ определяется как решение второй краевой задачи:

$$z_t=a^2 z_{xx}+\left(f(x, t)-v_t+a^2 v_{xx}\right),$$

$$z(0, t)=0,\ \ z(l, t)=0,$$

$$z(x, 0)=0.$$

Метод решения этой задачи был также разобран выше.

Покажем, что функция $u(x, t)$, определенная соотношением (29), удовлетворяет условиям (27)–(28) и является решением уравнения (26). Действительно,

$$u(0, t)=v(0, t)+w(0, t)+z(0, t)=\mu_1(t)+0+0=\mu_1(t),$$

$$u(l, t)=v(l, t)+w(l, t)+z(l, t)=\mu_2(t)+0+0=\mu_2(t),$$

$$u(x, 0)=v(x, 0)+w(x, 0)+z(x, 0)=$$

$$=v(x, 0)+\varphi(x)-v(x, 0)+0=\varphi(x),$$

т. е. выполнены условия (27)–(28).

Наконец,

$$u_t = v_t + w_t + z_t = v_t + a^2 w_{xx} + a^2 z_{xx} + f(x, t) - v_t + a^2 v_{xx} =$$

$$= a^2 (v_{xx} + w_{xx} + z_{xx}) + f(x, t) = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

т. е. функция $u(x, t)$ является решением уравнения (26). Таким образом, задача (26)–(28) полностью решена.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$u_t = u_{xx},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le \dfrac{l}{2}, \\ l - x, & \dfrac{l}{2} < x \le l. \end{cases}$$

Решение. Решение задачи Коши будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{\pi n x}{l}dx + \frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l - x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin\dfrac{\pi n x}{l} & v = -\dfrac{l}{\pi n}\cos\dfrac{\pi n x}{l} \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{2}{l}\left(-\frac{l}{\pi n}x\cos\frac{\pi nx}{l}\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{l}{\pi n}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi nx}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(-\frac{l^2}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\sin\frac{\pi nx}{l}\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}\right)=-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{2l}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{2}$$

и

$$\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\begin{vmatrix} u=l-x & du=-dx \\ dv=\sin\frac{\pi nx}{l} & v=-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{l}\left(-\frac{l}{\pi n}(l-x)\cos\frac{\pi nx}{l}\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}-\frac{l}{\pi n}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{\pi nx}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{l^2}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}-\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\sin\frac{\pi nx}{l}\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}\right)=\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{2l}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Тогда

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{2l}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{2}+$$

$$+\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{2l}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{2}=\frac{4l}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi nx}{l},$$

или, полагая $n = 2k+1$,

$$u(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}$$

(проверьте самостоятельно!).

Пример 2. Температура $u(x,\ t)$ однородного стержня в сечении x в момент времени t удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

На левом конце стержня (при $x=0$) поддерживается постоянная температура 0° С, а на правом конце (при $x=l$) тепло излучается в окружающую среду. Определить функцию $u(x,\ t)$, если

$$u(x,\ 0)=f(x).$$

Решение. Искомая функция $u(x,\ t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,\ t)=0,\quad \frac{\partial u(l,\ t)}{\partial x}=-\alpha u(l,\ t),$$

$$u(x,\ 0)=f(x).$$

Как известно, уравнению теплопроводности удовлетворяют функции

$$u(x,\ t)=e^{-\alpha^2k^2t}\left(A\cos kx+B\sin kx\right)$$

при любых постоянных k, A и B. Выберем среди этих функций те, которые удовлетворяют краевым условиям рассматриваемой задачи.

Из условия

$$u(0,\ t)=0$$

находим, что

$$A = 0.$$

Из второго краевого условия

$$\frac{\partial u(l,\ t)}{\partial x} = -\alpha u(l,\ t)$$

имеем

$$k \cos kl = -\alpha \sin kl,$$

т. е. собственные числа k_n — решения полученного уравнения. Поскольку эти числа, очевидно, обладают свойством

$$k_n = -k_{-n},$$

то достаточно построить собственные функции для $k_n > 0$.

Итак, каждому положительному собственному числу k_n соответствует решение

$$u_n = B_n e^{-\alpha^2 k_n^2 t} \sin k_n x$$

дифференциального уравнения, удовлетворяющее краевым условиям. Следовательно, искомую функцию $u(x,\ t)$ поищем в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha^2 k_n^2 t} \sin k_n x,$$

где коэффициенты B_n должны быть определены из условия

$$u(x,\ 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x.$$

Таким образом, задача определения коэффициентов B_n сведена к разложению функции $f(x)$ в ряд по системе функций

$$X_n = \sin k_n x.$$

Этот ряд аналогичен ряду Фурье, в силу ортогональности данной системы функций.

Действительно, при $m \neq n$ имеем

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x)\, dx = \int_0^l \sin k_m x \sin k_n x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \cos(k_m - k_n) x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^l \cos(k_m + k_n) x\, dx =$$

$$= \frac{\sin(k_m - k_n) l}{k_m - k_n} - \frac{\sin(k_m + k_n) l}{k_m + k_n} = 0,$$

в чем нетрудно убедиться, воспользовавшись формулами синуса суммы и разности с учетом следствия из второго краевого условия.

Умножив обе части равенства

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x$$

на $X_n(x)$, и интегрируя по x от 0 до l, с учетом ортогональности функций $X_n(x)$, получим

$$\int_0^l f(x) \sin k_n x\, dx = B_n \int_0^l \sin^2 k_n x\, dx,$$

откуда

$$B_n = \frac{\int_0^l f(x) \sin k_n x\, dx}{\int_0^l \sin^2 k_n x\, dx}.$$

Итак, решением исходной задачи является функция

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha^2 k_n^2 t} \sin k_n x,$$

где

$$B_n = \frac{\int_0^l f(x) \sin k_n x\, dx}{\int_0^l \sin^2 k_n x\, dx},$$

а k_n являются положительными решениями уравнения

$$k \cos k = -\alpha \sin k.$$

Замечание. Метод Фурье применим и для решения задачи о распределении установившейся температуры в тонкой однородной среде. Рассмотрим плоскую область D с границей Г, в каждой точке которой температура *установилась*, т.е. не изменяется с течением времени. Это означает, что $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ и, следовательно, для этой функции должно иметь место соотношение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

называемое ***уравнением Лапласа.*** Задача нахождения его решения, удовлетворяющего заданному на границе Г распределению температуры

$$u(x,y)\big|_{\Gamma}=f(x,y)$$

называется ***задачей Дирихле***. Функция $u(x,y)$, являющаяся в области D решением уравнения Лапласа, называется ***гармонической***.

Пример 3. Доказать, что уравнение Лапласа в полярных координатах r, φ имеет вид

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0.$$

Решение. Многие задачи, связанные с решением уравнения Лапласа, удобнее решать в полярных координатах. Сделаем в уравнении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

замену

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

При этом

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2\varphi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \sin\varphi\cos\varphi +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2\varphi - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin\varphi.$$

Отсюда

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

т. е. в полярных координатах уравнение Лапласа имеет вид

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Пример 4. Найти в круге $|r| < r_0$ функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

и краевому условию

$$u(r_0, \varphi) = f(\varphi),$$

где $f(\varphi)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π.

Решение. Эта задача называется ***задачей Дирихле для круга***. Физический смысл ее состоит в определении стационарного распределения температуры в круге (тонкой круговой пластинке), если известно, какая температура поддерживается на границе этого круга, т. е. в точках окружности $r = r_0$.

Применим к решению этой задачи метод Фурье. Поищем частные решения уравнения Лапласа в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Подставляя это выражение в уравнение, получим

$$r^2R''(r)\Phi(\varphi)+rR'(r)\Phi(\varphi)+R(r)\Phi''(\varphi)=0,$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}.$$

Поскольку левая часть равенства является функцией от φ, а правая — от r, то, приравнивая каждую из них постоянной k^2, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\Phi''(\varphi)+k^2\Phi(\varphi)=0$$

и

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0.$$

При $k=0$ получим:

$$\Phi_0(\varphi)=C_1+C_2\varphi,$$

$$R_0(r)=C_3+C_4\ln r.$$

Если же $k>0$, то

$$\Phi(\varphi)=A\cos k\varphi+B\sin k\varphi,$$

а решения второго из пары уравнений ищем в виде

$$R(r)=r^\lambda$$

(это уравнение является уравнением Эйлера), что дает

$$r^2\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}+r\lambda r^{\lambda-1}-k^2r^\lambda=0$$

или

$$r^\lambda(\lambda^2-k^2)=0,$$

то есть

$$\lambda = \pm k.$$

Следовательно,

$$R(r) = Cr^k + Dr^{-k}.$$

Поскольку функция $u(r, \varphi)$ должна быть периодической по φ с периодом 2π, то из полученных соотношений следует, что

$$C_2 = 0,$$

а k может принимать одно из натуральных значений.

Далее, коэффициенты C_4 и D равны нулю, так как в противном случае функция $u(r, \varphi)$ имела бы разрыв в точке $r = 0$ и не была бы гармонической в круге.

Таким образом, построена последовательность частных решений исходного уравнения, непрерывных в круге $|r| < r_0$:

$$u_0(r, \varphi) = \frac{A_0}{2},$$

$$u_n(r, \varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Функция

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

вследствие линейности и однородности уравнения Лапласа также является решением этого уравнения. Остается определить постоянные A_0, A_n и B_n так, чтобы эта функция удовлетворяла краевому условию

$$u(r, \varphi)\Big|_{r=r_0} = f(\varphi),$$

то есть

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi).$$

Следовательно, числа $r_0^n A_n$ и $r_0^n B_n$ являются коэффициентами разложения функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Поэтому, по известным формулам, имеем:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,d\varphi,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi r_0^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi r_0^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\theta - \varphi)\right)d\theta.$$

Полученный результат можно преобразовать к более простому виду, если воспользоваться тем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho e^{it}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n \cos nt + i\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n \sin nt$$

сходится при $\rho < 1$ и его сумма равна

$$\frac{1}{1-\rho^{it}} = \frac{1}{1-\rho\cos t - i\rho\sin t} = \frac{1-\rho\cos t}{1-2\rho\cos t} + i\frac{\rho\sin t}{1-2\rho\cos t+\rho^2}.$$

В силу этого,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\theta-\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\theta-\varphi) - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1-\frac{r}{r_0}\cos(\theta-\varphi)}{1-2\frac{r}{r_0}\cos(\theta-\varphi)+\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} - \frac{1}{2} = \frac{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}{2\left(1-2\frac{r}{r_0}\cos(\theta-\varphi)+\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)} =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2r_0r\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

Поэтому, найденное решение $u(r,\ \varphi)$ можно записать в виде

$$u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2r_0r\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

Найденная функция $u(r,\ \varphi)$ является решением задачи Дирихле для круга. Интеграл, стоящий в правой части последнего выражения, называется ***интегралом Пуассона***.

Пример 5. Найти решение уравнения Лапласа для кольца

$$1\le x^2+y^2\le 2,$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{x^2+y^2=1}=0,$$

$$u\big|_{x^2+y^2=2}=x+\ln 2.$$

Решение. В полярной системе координат искомая функция $u(r,\ \varphi)$ является решением краевой задачи

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0,$$

$$u(1,\ \varphi)=0,\ \ u\left(\sqrt{2},\varphi\right)=\sqrt{2}\cos\varphi+\ln 2.$$

Указанную краевую задачу решаем методом Фурье. При этом частные решения уравнения Лапласа ищем в виде

$$u(r,\ \varphi)=R(r)\Phi(\varphi),$$

где функции $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$ определяются соответственно из уравнений

$$\Phi''(\varphi)+k^2\Phi(\varphi)=0$$

и

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0.$$

Как и при решении предыдущей задачи, при $k=0$ имеем

$$\Phi_0(\varphi)=C_1+C_2\varphi,$$

$$R_0(r)=C_3+C_4\ln r,$$

а при $k>0$

$$\Phi(\varphi)=A\cos k\varphi+B\sin k\varphi,$$

$$R(r)=Cr^k+Dr^{-k}.$$

Из условия периодичности искомой функции по φ с периодом 2π следует, что

$$C_2=0,$$

а k может принимать одно из натуральных значений.

Из начального условия

$$u(r,\ \varphi)\big|_{r=1}=0$$

получаем, что

$$C_3=0,\ \ C+D=0.$$

Таким образом, получена последовательность u_n частных решений уравнения Лапласа, каждое из которых удовлетворяет первому из краевых условий задачи:

$$u_0(r,\ \varphi)=\frac{A_0}{2}\ln r,$$

$$u_n(r,\ \varphi)=\operatorname{sh}(n\ln r)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),\ \ n=1,\ 2,\ \ldots$$

Составим функцию

$$u(r,\ \varphi)=\frac{A_0}{2}\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sh}(n\ln r)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi).$$

Эта функция при любых A_0, A_n и B_n удовлетворяет уравнению Лапласа и первому из краевых условий задачи. Определим коэффициенты A_0, A_n и B_n таким образом, чтобы построенная функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяла и второму краевому условию, т. е. чтобы

$$u\left(\sqrt{2}, \varphi\right) = \frac{A_0}{2}\ln\sqrt{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh}\left(n\ln\sqrt{2}\right)\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) =$$

$$= \ln 2 + \sqrt{2}\cos\varphi.$$

Это равенство, очевидно, выполняется при всех φ тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_0}{2}\ln\sqrt{2} = \ln 2,$$

$$\operatorname{sh}\left(\ln\sqrt{2}\right)A_1 = \sqrt{2}, \quad B_1 = 0,$$

$$A_n = B_n = 0, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

отсюда

$$A_0 = 4,$$

$$A_1 = 4, \quad B_1 = 0,$$

и искомая функция имеет вид

$$u(r, \varphi) = \ln r^2 + 4\operatorname{sh}(\ln r)\cos\varphi.$$

Переходя обратно к декартовым координатам x и y, решение задачи можно записать в виде

$$u = \ln\left(x^2 + y^2\right) + 2x\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

Пример 6. Найти стационарное распределение температуры в тонком стержне длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если на левом конце стержня поддерживается постоянная температура u_0, а на правом конце стержня тепло излучается в окружающую среду, температура которой u^*. Коэффициент теплоперехода равен α.

Решение. Искомая функция $u = u(x)$ должна удовлетворять одномерному уравнению Лапласа

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

и краевым условиям

$$u(0) = u_0,$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=l} = -\alpha\left(u(l) - u^*\right).$$

Решение уравнения имеет вид

$$u(x) = C_1 x + C_2,$$

причем коэффициенты C_1 и C_2 находятся из граничных условий:

$$u(0) = C_2 = u_0,$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=l} = -\alpha\left(C_1 l + C_2 - u^*\right) = C_1,$$

откуда

$$C_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha l}\left(u^* - u_0\right),$$

$$C_2 = u_0.$$

Таким образом, стационарное распределение температуры по стержню описывается функцией

$$u(x) = \frac{\alpha}{1+\alpha l}\left(u^* - u_0\right)x + u_0.$$

§ 5. Принцип максимального значения

Пусть P — прямоугольник на плоскости xOt, определенный соотношениями

$$0 \le x \le l, \ 0 \le t \le T.$$

Обозначим через Γ объединение трех сторон этого прямоугольника, определенных соотношениями

$$x = 0, \ 0 \le t \le T;$$

$$x = l, \ 0 \le t \le T;$$

$$t = 0, \ 0 \le x \le l,$$

а через γ — четвертую его сторону, определяемую соотношениями

$$t = T, \ 0 \le x \le l.$$

Теорема (Принцип максимального значения). *Функция* $u(x, t)$, *удовлетворяющая уравнению теплопроводности*

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

в прямоугольнике P, достигает своего максимального значения в точке, принадлежащей множеству Γ.

Доказательство. Предположим противное: пусть M — максимальное значение функции $u(x, t)$ на Γ, а $M + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — ее максимальное значение в точке (x_0, t_0) прямоугольника P, лежащей вне Γ.

Тогда в точке максимума (x_0, t_0) имеем:

$$u_x(x_0, t_0) = 0,$$

$$u_{xx}(x_0, t_0) \le 0,$$

$$u_t(x_0, t_0) \ge 0,$$

причем равенство $u_t(x_0, t_0) > 0$ возможно, если точка (x_0, t_0) лежит на стороне γ, т. е. $t_0 = T$.

Рассмотрим функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t),$$

где

$$k < \frac{\varepsilon}{2T}.$$

Очевидно, что

$$\left| k(t_0 - t) \right| < \frac{\varepsilon}{2T} T = \frac{\varepsilon}{2},$$

поэтому на Γ имеем:

$$\max_{\Gamma} v(x, t) \le \max_{\Gamma} u(x, t) + \max_{\Gamma} k(t_0 - t) < M + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда в точке (x_0, t_0) имеем:

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon > \max_{\Gamma} v(x,t),$$

следовательно, максимальное значение функции $v(x, t)$ в прямоугольнике P достигается в некоторой точке (x_1, t_1), лежащей вне Γ.

В точке (x_1, t_1) очевидно,

$$v_{xx}(x_1, t_1) = u_{xx}(x_1, t_1) \le 0,$$

$$v_t(x_1, t_1) = u_t(x_1, t_1) - k \ge 0,$$

откуда

$$u_t(x_1, t_1) - a^2 u_{xx}(x_1, t_1) \ge k > 0,$$

и мы пришли к противоречию с условием, что функция $u(x, t)$ всюду в прямоугольнике P удовлетворяет уравнению теплопроводности. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Если функция $u(x, t)$ в некоторой точке (x_2, t_2) достигает своего минимального значения, то функция

$$v(x, t) = -u(x, t)$$

достигает в этой точке своего максимального значения, причем функция $v(x, t) = -u(x, t)$ также удовлетворяет уравнению теплопроводности. Поэтому из принципа максимального значения для функции $v(x, t)$ следует, что функция $u(x, t)$ достигает своего минимального значения на Г.

Замечание 2. Если три решения u_1, u_2, u_3 уравнения теплопроводности удовлетворяют неравенствам

$$u_1(x, t) \le u_2(x, t) \le u_3(x, t)$$

на Г, то эти же неравенства справедливы всюду внутри прямоугольника Р (проверьте самостоятельно, применяя принцип максимального значения к функциям $u_1 - u_2$ и $u_2 - u_3$).

§ 6. Корректность постановки задачи Коши для уравнения теплопроводности

Покажем, что первая краевая задача (2)–(4) для уравнения теплопроводности поставлена корректно, т. е., что ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных и краевых условий.

Существование решения доказано выше. Заметим, что начальные и краевые условия определяют значения функции $u(x, t)$ на Г. Пусть два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ на Г удовлетворяют неравенствам

$$-\varepsilon \le u_1(x, t) - u_2(x, t) \le \varepsilon. \qquad (30)$$

Функция

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

и постоянные функции

$$v_{\pm}(x, t) = \pm\varepsilon$$

удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности (2). Поэтому, из замечания 2 следует, что неравенства (30) справедливы всюду внутри прямоугольника P. Это и означает непрерывную зависимость от начальных и краевых условий.

Если два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ совпадают на Г, то в (30) имеем

$$\varepsilon = 0,$$

следовательно,

$$u_1(x, t) = u_2(x, t)$$

всюду внутри прямоугольника P, что и доказывает единственность решения.

Таким образом, краевая задача (2)–(4) поставлена корректно.

Литература

1. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков, 1939.
2. *Альсевич Л.А., Черенкова Л.П.* Практикум по дифференциальным уравнениям. — Минск, 1990.
3. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. — М., 1987.
4. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., 1984.
5. *Асланов Р.М., Колягин С.Ю., Матросов В.Л., Топунов М.В.* Программа курса «Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными». — М., 2003.
6. *Асланов Р.М., Матросов В.Л., Топунов М.В.* Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Теоретический курс. — М., 2003.
7. *Асланов Р.М., Матросов В.Л., Топунов М.В., Тетеруковский А.В.* Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Сборник задач. — М., 2004.
8. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М., 1954.
9. *Бибиков Ю.И.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Л., 1981.
10. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление (линейная теория). — М., 2001.
11. *Богоявленский О.Н.* Уравнения математической физики. — М., 1985.
12. *Владимиров В.В.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — М., 1974.
13. *Гаврилов Н.И.* Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., 1962.
14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М., 1988.
15. *Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н.* Сборник задач по математическому анализу. — М., 1973.
16. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Киев, 1974.
17. *Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко П.С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев, 1974.
18. *Зайцев В.Б., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М., 2001.
19. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М., 1996.
20. *Киселев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М., 1965.
21. *Коддингтон А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., 1958.
22. *Краснов М.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., 1983.
23. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И.* Операционное исчисление. Устойчивость движения. — М., 1964.

24. *Креер Л.И.* Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям. — М., 1940.
25. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М., 1961.
26. *Лурье А.Н.* Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. — М., 1950.
27. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. — М., 1952.
28. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М., 1962.
29. *Матвеев Н.М.* Дифференциальные уравнения. — М., 1988.
30. *Матросов В.Л.* Основы курса высшей математики. — М., 2002.
31. *Пантелеев А.В., Якимова Н.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. — М., 2001.
32. *Пономарев К.К.* Составление дифференциальных уравнений. — Минск, 1973.
33. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., 1982.
34. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., 1984.
35. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях в частных производных. — М., 1961.
36. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения (примеры и задачи). — М., 1989.
37. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., 1953 (Т. 1), 1954 (Т. 2).
38. *Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики. — М., 1954.
39. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — М., 1959.
40. *Теркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. — М., 1976.
41. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М., 1972.
42. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. — М., 1962.
43. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М., 1998.
44. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. — СПб., 1997.
45. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., 1970.
46. *Шелковников Ф.А., Такайшвили Л.Г.* Сборник упражнений по операционному исчислению. — М., 1968.
47. *Школьник А.Г.* Дифференциальные уравнения. — М., 1963.
48. *Шосток Р.Я.* Операционное исчисление. — М., 1972.
49. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения. — М., 1957.
50. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М., 1969.

Содержание

Предисловие 3

Введение 5

Раздел I. Обыкновенные дифференциальные уравнения 7

Глава 1. Основные определения и понятия **7**

§ 1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям 7

§ 2. Основные определения и понятия, связанные с дифференциальными уравнениями 11

§ 3. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка 30

Глава 2. Элементарные типы дифференциальных уравнений **38**

§ 1. Простейший тип дифференциальных уравнений 38

§ 2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными ... 39

§ 3. Однородные дифференциальные уравнения 46

§ 4. Уравнения в полных дифференциалах 54

§ 5. Линейные уравнения первого порядка 62

§ 6. Уравнение Бернулли 68

§ 7. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро 73

§ 8. Неполные дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка 80

§ 9. Неполные дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка 87

Глава 3. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка и их системы **91**

§ 1. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка 91

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 101

§ 3. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) 104

§ 4. Нормальные системы дифференциальных уравнений 107

§ 5. Методы интегрирования систем дифференциальных уравнений 113

§ 6. Линейные системы дифференциальных уравнений 120

Глава 4. Элементы операционного исчисления **128**

§ 1. Преобразование Лапласа. Основные теоремы операционного исчисления 128

§ 2. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 142

§ 3. Применение операционного исчисления к решению линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 145

Глава 5. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и их системы 148

§ 1. Применение операционного исчисления для изучения структуры решения линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами 148

§ 2. Применение операционного исчисления для изучения структуры решения линейного неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида 158

§ 3. Явление резонанса 165

§ 4. Метод Эйлера 171

§ 5. Метод Даламбера 179

Глава 6. Матричный метод интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений 181

§ 1. Некоторые сведения из теории матриц 181

§ 2. Матрицант 184

§ 3. Применение теории матриц для интегрирования однородных линейных систем дифференциальных уравнений 189

§ 4. Применение теории матриц для интегрирования неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений 194

Глава 7. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с помощью рядов 199

§ 1. Интегрирование линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в виде степенного ряда 199

§ 2. Интегрирование линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в виде обобщенного степенного ряда 204

§ 3. Уравнение Бесселя 207

§ 4. Уравнение Лежандра 212

Глава 8. Элементы теории устойчивости 215

§ 1. Устойчивость решений дифференциальных уравнений 215

§ 2. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений 219

§ 3. Устойчивость линейных однородных систем дифференциальных уравнений 224

§ 4. Устойчивость линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 229

§ 5. Устойчивость систем, близких к линейным 231

§ 6. Системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами 238

§ 7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами 241

§ 8. Точки покоя. Простейшие типы точек покоя. 246

Раздел II. Уравнения с частными производными 251

Глава 9. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка 251

§ 1. Основные определения и понятия 251

§ 2. Линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка 254

§ 3. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка 265

Глава 10. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка–I 274

§ 1. Основные определения и понятия 274

§ 2. Задача Коши для дифференциального уравнения с частными производными второго порядка и ее геометрическая интерпретация 276

§ 3. Существование и единственность решения задачи Коши 278

§ 4. Уравнение колебаний струны 286

Глава 11. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка–II 292

§ 1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка 292

§ 2. Приведение к каноническому виду квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка 297

§ 3. Формула Даламбера 304

§ 4. Формула Даламбера для полубесконечной струны 306

§ 5. Корректность постановки задачи Коши для волнового уравнения 311

Глава 12. Метод Фурье 314

§ 1. Первая краевая задача 315

§ 2. Вторая краевая задача 328

§ 3. Краевая задача в общей постановке 330

§ 4. Явление резонанса 331

Глава 13. Уравнение теплопроводности 341

§ 1. Уравнение теплопроводности 341

§ 2. Первая краевая задача 344

§ 3. Вторая краевая задача 350

§ 4. Краевая задача в общей постановке 352

§ 5. Принцип максимального значения 368

§ 6. Корректность постановки задачи Коши для уравнения теплопроводности 370

Литература 372

Содержание 374

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ

В учебнике подробно рассмотрены основные определения и понятия, связанные с дифференциальными уравнениями, элементарные типы обыкновенных дифференциальных уравнений, линейные дифференциальные уравнения и их системы, элементы теории устойчивости, волновое уравнение, метод Фурье и другие вопросы.

Излагаемый теоретический материал проиллюстрирован большим количеством подробно рассмотренных разнообразных задач и примеров.

Для студентов высших учебных заведений.

ISBN 978-5-691-01655-4

9 785691 016554

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ