П.С. ГЕВОРКЯН

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИНТЕГРАЛЫ, РЯДЫ, ТФКП, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области экономики и управления, техники и технологии

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 517.52+53+37+91
ББК 22.16
Г 27

Геворкян П. С. **Высшая математика. Интегралы, ряды, ТФКП, дифференциальные уравнения.** Ч. 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 272 с. — ISBN 978-5-9221-0710-5.

Настоящая книга вместе с другой книгой автора, «Высшая математика. Основы математического анализа», охватывает весь комплекс вопросов, которые изучаются в рамках курса «Высшая математика» в высших учебных заведениях, за исключением вопросов линейной алгебры и аналитической геометрии. Она содержит следующие разделы высшей математики: «Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля», «Ряды», «Дифференциальные уравнения» и «Теория функции коплексного переменного».

Для студентов инженерно-технических и экономических специальностей вузов, а также для изучающих в том или ином объеме высшую математику.

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области экономики и управления, техники и технологии.

Рецензенты:
д.ф.-м.н., проф. Петрушко И. М.,
д.ф.-м.н., проф. Смирнов Ю. М.

ISBN 978-5-9221-0710-5

Учебное издание

ГЕВОРКЯН Павел Самвелович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ИНТЕГРАЛЫ, РЯДЫ, ТФКП,
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 2

Редактор: *Легостаева И.Л.*
Оригинал-макет: *Савицкая Т.Н.*
Оформление переплета: *Алехина А.Ю.*

Подписано в печать 06.04.07. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17. Уч.-изд. л. 18,7. Тираж 1000 экз.
Заказ № 3865.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 978-5-9221-0710-5

9 785922 107105

ОГЛАВЛЕНИЕ

Светлой памяти своего отца
школьного учителя математики
Самвела Павловича Геворкяна
посвящает автор эту книгу

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга вместе с нашей другой книгой, изданной под названием «Высшая математика. Основы математического анализа», охватывают весь комплекс вопросов, которые изучаются в рамках курса «Высшая математика» для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений, за исключением раздела «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», который готовится к печати в виде отдельной книги.

В предлагаемой книге нашли отражение следующие разделы высшей математики: «Кратные интегралы» (гл. 1), «Криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля» (гл. 2), «Ряды» (главы 3–6), «Дифференциальные уравнения» (главы 7 и 8) и «Теория функции комплексного переменного» (гл. 9).

В книге даются ссылки на предыдущую книгу: *Геворкян П. С.* Высшая математика. Основы математического анализа. — М.: Физматлит, 2004.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. М. Петрушкó за ценные замечания при написании глав 3–6.

Москва, март, 2006 г. *П.С. Геворкян*

Глава 1

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1.1. Задача об объеме цилиндрического бруса. Определение двойного интеграла

Подобно тому, как задача о площади криволинейной трапеции привела к понятию определенного интеграла, задача об объеме цилиндрического бруса приводит к понятию *двойного* (*определенного*) *интеграла*.

Пусть

$$z = f(x, y) \tag{1.1}$$

— непрерывно-дифференцируемая и положительная функция двух переменных, определенная на ограниченном подмножестве (S) плоскости $\mathbf{R}^2$.

Рассмотрим тело (V), которое сверху ограничено поверхностью (1.1), снизу плоскостью $z = 0$, а с боков — цилиндрической поверхностью, проходящей через границу γ плоского множества (S), с образующей, параллельной оси Oz (рис. 1.1). Требуется найти объем V тела (V), который представляет собой цилиндрический брус.

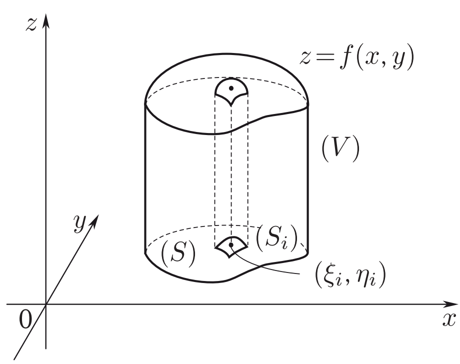

Рис. 1.1

Для решения этой задачи прибегнем к обычному в интегральном исчислении приему: разобьем множество (S) с помощью сети кривых на элементарные части (S_1), (S_2), ..., (S_n). Возникают цилиндрические столбики (V_1), (V_2), ..., (V_n) с основаниями (S_1), (S_2), ..., (S_n). Объединение этих цилиндрических столбиков совпадает с телом (V). Мы предполагаем, что все плоские фигуры (S_1), (S_2), ..., (S_n) квадрируемы, т. е. имеют площади, которые соответственно обозначим через S_1, S_2, ..., S_n.

Теперь в каждой фигуре (S_i) возьмем произвольную точку (ξ_i, η_i) и заметим, что

$$f(\xi_i, \eta_i)S_i$$

есть приближенное значение объема столбика (V_i). Следовательно, приближенное значение объема всего тела (V) будет

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)S_i.$$

Диаметр множества (S_i) обозначим через d_i:

$$d_i = \sup_{P, P' \in (S_i)} \rho(P, P'),$$

где $\rho(P, P')$ — расстояние между точками $P, P' \in (S_i)$. Положим

$$d = \max\{d_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Теперь объем тела (V) естественно определить как предел

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)S_i. \tag{1.2}$$

Если отвлечься от задачи об объеме цилиндрического бруса, то вышеизложенным способом приходим к понятию двойного интеграла от функции $z = f(x, y)$ по области (S).

О п р е д е л е н и е 1.1.1. Если существует предел

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)S_i$$

независимо от выбора точек $(\xi_i, \eta_i) \in (S_i)$ и независимо от разбиения множества (S) на элементарные части, то он называется *двойным интегралом* функции $z = f(x, y)$ по области (S) и обозначается

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS,$$

или

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

В этом случае говорят также, что функция $z = f(x, y)$ *интегрируема* на множестве $(S) \subset \mathbf{R}^2$, которое называется *областью интегрирования*. Величина dS (или $dx\, dy$) называется *элементом площади*, а x и y называются *переменными интегрирования*.

Понятие двойного интеграла позволяет полученную выше формулу (1.2) переписать в виде

$$V = \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS. \tag{1.3}$$

§ 1.2. Задача о вычислении массы тела. Определение тройного интеграла

Пусть дано некоторое тело (V) в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$. Предположим, что известна плотность $\rho(x, y, z)$ распределения массы в каждой точке $M(x, y, z)$ тела (V). Требуется *определить всю массу m тела* (V).

Для решения этой задачи разобьем тело (V) на n частей (V_1), (V_2), ..., (V_n) и выберем в каждой из этих частей по точке $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Теперь предположим, что плотность во всех точках части (V_i) приближенно равна плотности $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Тогда масса m_i части (V_i) приближенно равна

$$\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i,$$

где V_i — объем части (V_i). Следовательно, масса m всего тела (V) приближенно будет

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i.$$

Максимальный из всех диаметров частей (V_1), (V_2), ..., (V_n) обозначим через d. Тогда точное значение массы m тела (V) вычислится следующим образом:

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i. \tag{1.4}$$

Итак, поставленная задача о вычислении массы тела полностью решена. Если отвлечься от этой задачи и рассматривать произвольную функцию $f(x, y, z)$ вместо функции плотности $\rho(x, y, z)$, то вышеизложенным способом мы придем к понятию тройного интеграла функции $f(x, y, z)$ по телу (V).

Определение 1.2.1. Если существует предел

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i.$$

независимо от выбора точек (ξ_i, η_i, ζ_i) и независимо от разбиения множества (V) на элементарные части, то он называется *тройным интегралом* функции $u = f(x, y, z)$ по множеству (V) и обозначается

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV,$$

или

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

В этом случае говорят также, что функция $u = f(x, y, z)$ *интегрируема* на множестве (V).

Теперь полученную выше формулу (1.4) для вычисления массы тела можем представить в виде

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho(x, y, z)\, dV.$$

Замечание 1.2.1. Во всех рассуждениях, сделанных выше, мы предположили, что все множества V, V_1, V_2, ..., V_n кубируемы, т. е. имеют объемы. Для этого достаточно было потребовать, чтобы границы всех этих элементарных частей представляли собой гладкие или кусочно-гладкие поверхности.

§ 1.3. Свойства двойных интегралов. Теоремы существования

Теорема 1.3.1. *Справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(S)} dS = S, \tag{1.5}$$

где S площадь фигуры (S).

Доказательство непосредственно следует из определения двойного интеграла. □

Теорема 1.3.2. *Пусть функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ определены на одном и том же множестве (S) плоскости $\mathbf{R}^2$ и на этом множестве имеют двойные интегралы. Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_{(S)} [Af(x, y) \pm B\varphi(x, y)]\, dS = A \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS \pm B \iint\limits_{(S)} \varphi(x, y)\, dS, \tag{1.6}$$

где A и B — постоянные числа.

Доказательство. Согласно определению двойного интеграла имеем

$$\iint\limits_{(S)} [Af(x, y) \pm B\varphi(x, y)]\, dS = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} [Af(\xi_i, \eta_i) \pm B\varphi(\xi_i, \eta_i)]\, S_i =$$

$$= A \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) S_i \pm B \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \eta_i) S_i =$$

$$= A \iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dS \pm B \iint\limits_{(S)} \varphi(x, y)\, dS.$$

□

Следующие две теоремы доказываются аналогично соответствующим теоремам для функции одной переменной.

Теорема 1.3.3. *Пусть функция $f(x, y)$ определена на квадрируемом подмножестве (S) плоскости $\mathbf{R}^2$. Предположим, что* *множество* (S) *некоторой кусочно-гладкой кривой разложено на два квадрируемые подмножества* (S') *и* (S''). *Тогда из существования двойного интеграла функции* $f(x,y)$ *по области* (S) *следует существование двойных интегралов этой функции в обоих областях* (S') *и* (S''), *и обратно. При этом имеет место разложение*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS = \iint\limits_{(S')} f(x,y)\,dS' + \iint\limits_{(S'')} f(x,y)\,dS''. \tag{1.7}$$

Теорема 1.3.4. *Пусть* $f(x,y) \leqslant \varphi(x,y)$ *для всех* $(x,y) \in (S)$ *и существуют двойные интегралы функций* $f(x,y)$ *и* $\varphi(x,y)$ *по* (S). *Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS \leqslant \iint\limits_{(S)} \varphi(x,y)\,dS. \tag{1.8}$$

Теорема 1.3.5. *Справедлива формула*

$$\left|\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS\right| \leqslant \iint\limits_{(S)} |f(x,y)|\,dS. \tag{1.9}$$

Доказательство. Рассмотрим очевидное двойное неравенство

$$-|f(x,y)| \leqslant f(x,y) \leqslant |f(x,y)|.$$

Применяя формулу (1.8) к этим неравенствам, получим

$$-\iint\limits_{(S)} |f(x,y)|\,dS \leqslant \iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS \leqslant \iint\limits_{(S)} |f(x,y)|\,dS,$$

что равносильно неравенству (1.9). □

Теорема 1.3.6 (о среднем). *Пусть функция двух переменных* $z = f(x,y)$ *определена и интегрируема на замкнутом множестве* $(S) \subset \mathbf{R}^2$. *Тогда существует такая точка* $(\xi,\eta) \in \in (S)$, *что*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dS = f(\xi,\eta)\,S. \tag{1.10}$$

где S *— площадь фигуры* (S).

Доказательство. Наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x, y)$ на замкнутом множестве $(S) \subset \mathbf{R}^2$, которые существуют согласно известной теореме Вейерштрасса, обозначим через m и M соответственно. Тогда

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M \tag{1.11}$$

для всех точек $(x, y) \in (S)$.

Из неравенства (1.11), учитывая теорему 1.3.4, получим

$$\iint\limits_{(S)} m\,dS \leqslant \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dS \leqslant \iint\limits_{(S)} M\,dS,$$

откуда в силу теоремы 1.3.1 имеем

$$mS \leqslant \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dS \leqslant MS,$$

или

$$m \leqslant \frac{1}{S} \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dS \leqslant M.$$

Учитывая последнее двойное неравенство, согласно известной теореме Больцано–Коши можем найти такую точку $(\xi, \eta) \in (S)$, что

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dS\,,$$

откуда и получаем формулу (1.10).

Теорема доказана. □

Теперь сформулируем две *теоремы существования двойного интеграла.*

Теорема 1.3.7. *Всякая непрерывная в области (S) функция $z = f(x, y)$ интегрируема.*

Теорема 1.3.8. *Если функция $z = f(x, y)$ ограничена и имеет разрывы только лишь на конечном числе гладких кривых области (S), то она интегрируема.*

Напомним, что *областью* называется открытое и связное подмножество плоскости.

Замечание 1.3.1. Все теоремы этого параграфа, с соответствующими поправками, справедливы и для тройных интегралов.

§ 1.4. Приведение двойного интеграла к повторному

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена на прямоугольнике
$$\Delta = [a, b] \times [c, d],$$
т. е. на множестве точек $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, которые удовлетворяют условию
$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$
где $a < b$, а $c < d$.

Теорема 1.4.1. *Пусть для функции $f(x, y)$ существует двойной интеграл*
$$\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\, dx\, dy$$
и также при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует обычный интеграл
$$I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\, dy.$$
Тогда существует повторный интеграл
$$\int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right\} dx \equiv \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy$$
и выполняется равенство
$$\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy. \tag{1.12}$$

Доказательство. Разобьем стороны прямоугольника на части с помощью точек
$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$
и
$$c = y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d.$$

Тогда прямоугольник Δ разобьется на элементарные прямоугольники

$$\Delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

$i = 1, \ldots, n-1$ и $j = 1, \ldots, m-1$.

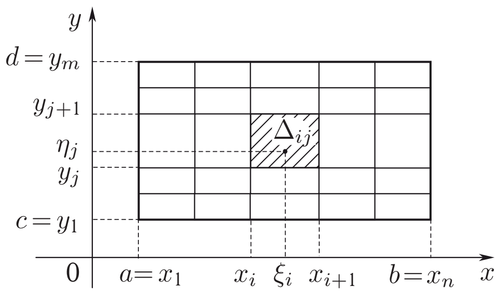

Рис. 1.2

Заметим, что соответствующую разбиению Δ_{ij} интегральную сумму двойного интеграла $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy$ можно представить в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, а $(\xi_i, \eta_j) \in \Delta_{ij}$ (рис. 1.2). Следовательно,

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j)\Delta y_j \right\} \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int\limits_c^d f(\xi_i, y)\,dy \right\} \Delta x_i = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy,$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 1.4.1. Оказывается, для выполнения условия последней теоремы, а, стало быть, и формулы (1.12), достаточно потребовать непрерывность функции $f(x,y)$ на прямоугольнике Δ. В этом случае справедлива также формула

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \tag{1.13}$$

а значит, и равенство

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx. \tag{1.14}$$

Таким образом вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла.

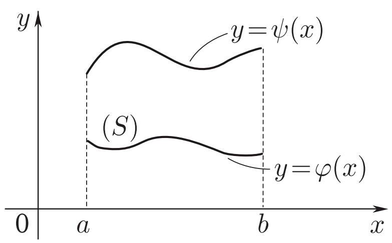

Рис. 1.3

Теперь предположим, что функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на множестве $(S) \subset \subset \mathbf{R}^2$, которое ограничено гладкими кривыми

$$y = \varphi(x), \qquad y = \psi(x),$$
$$(\varphi(x) \leqslant \psi(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b)$$

и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1.3.). Тогда, аналогично последней теореме, доказывается формула

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{1.15}$$

Пример 1.4.1. Вычислить площадь S фигуры (S), ограниченной эллипсом (рис. 1.4)

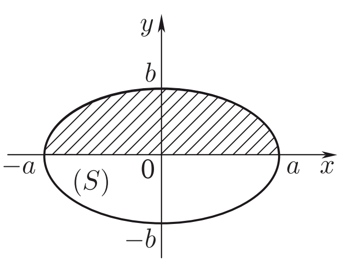

Рис. 1.4

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Согласно теореме 1.3.1 имеем

$$S = \iint\limits_{(S)} dx\,dy.$$

Для вычисления последнего двойного

интеграла применим формулу (1.12):

$$S = \iint\limits_{(S)} dx\,dy = 2\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{2b}{a}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{4b}{a}\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int\limits_{0}^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\quad a\cos t\,dt =$$

$$= 4ab\int\limits_{0}^{\pi/2} cos^2 t\,dt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi/2}(1+cos 2t)\,dt = 2ab\Big(t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Выше была произведена замена переменной $x = a\sin t$. □

§ 1.5. Вычисление тройного интеграла

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна на множестве $(V) = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$, который представляет собой параллелепипед (рис. 1.5). Как и в случае двойного интеграла, можно доказать, что справедлива следующая формула вычисления тройного интеграла функции $u = f(x, y, z)$ по множеству (V):

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz. \tag{1.16}$$

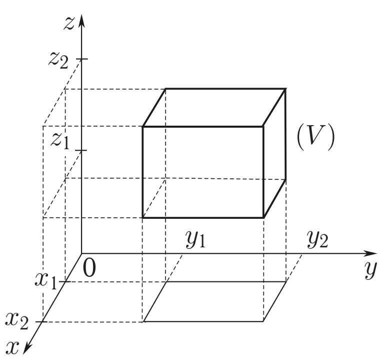

Рис. 1.5

Пусть теперь функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна

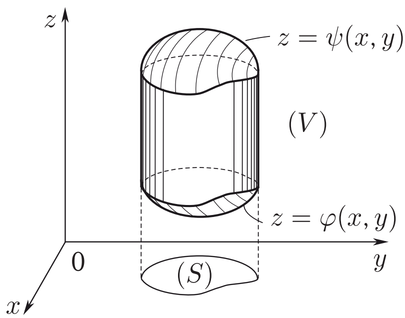

Рис. 1.6

на теле (V), имеющем форму цилиндрического бруса, ограниченного снизу поверхностью $z = \varphi(x, y)$, сверху — поверхностью $z = \psi(x, y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. Проекцию тела (V) на координатную плоскость Oxy обозначим через (S) (рис. 1.6). Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(S)} dx\, dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \tag{1.17}$$

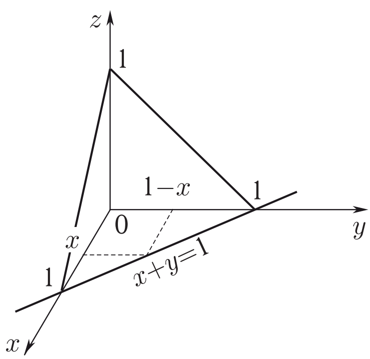

Рис. 1.7

Пример 1.5.1. Вычислить объем V тела (V), ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $x + y + z = 1$ (рис. 1.7).

Искомый объем равняется тройному интегралу

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz,$$

который вычислим по формуле (1.17):

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left[(1 - x)y - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1-x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1 - x)^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x - 1)^2\, d(x - 1) = \frac{1}{2}\ \frac{(x - 1)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

□

§ 1.6. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на области (D) с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.18}$$

и в нем произведем замену переменных

$$\begin{aligned} x &= a\xi + b\eta, \\ y &= c\xi + d\eta, \end{aligned} \tag{1.19}$$

где

$$J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, как видоизменится двойной интеграл (1.18) при замене переменных (1.19).

Предположим, что преобразование, обратное к (1.19), отображает область (D) с кусочно-гладкой границей в область (Δ) также с кусочно-гладкой границей (рис. 1.8).

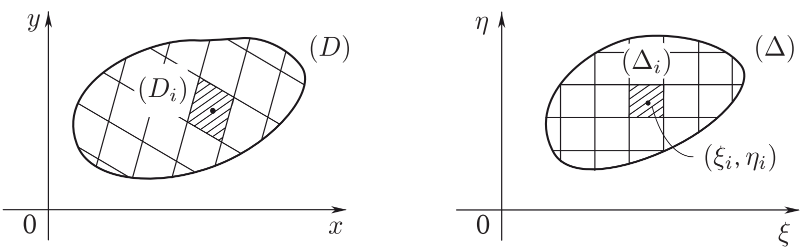

Рис. 1.8

На плоскости $O\xi\eta$ рассмотрим квадратную сетку со стороной длины h. Этой сеткой область (Δ) разобьется на части (Δ_i), $i = 1, \ldots, n$. С помощью преобразования (1.19) получим соответствующее разбиение (D_i), $i = 1, \ldots, n$, области (D), где каждое (D_i) представляет собой некоторый параллелограмм («полный» или «неполный»). Докажем, что

$$D_i = |J|\Delta_i, \tag{1.20}$$

где D_i и Δ_i — площади (D_i) и (Δ_i) соответственно.

Квадрат (Δ_i) определяется двумя векторами $(h, 0)$ и $(0, h)$. Преобразованием (1.19) эти векторы отображаются в векторы (ah, ch) и (bh, dh) соответственно, которые и определяют параллелограмм (D_i). Следовательно, площадь этого параллелограмма вычисляется по формуле

$$D_i = \left| \begin{vmatrix} ah & bh \\ ch & dh \end{vmatrix} \right| = h^2 \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = h^2|J| = |J|\Delta_i.$$

Теперь вычислим двойной интеграл:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) D_i =$$
$$= \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(a\xi_i + b\eta_i, c\xi_i + d\eta_i)|J|\Delta_i =$$
$$= \iint\limits_{(\Delta)} f(a\xi + b\eta, c\xi + d\eta)|J|\,d\xi\,d\eta.$$

Таким образом мы получили следующую *формулу замены переменных в двойном интеграле* в случае линейного преобразования (1.19):

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(a\xi + b\eta, c\xi + d\eta)|J|\,d\xi\,d\eta. \tag{1.21}$$

Теперь в двойном интеграле (1.18) произведем произвольную замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\xi,\eta), \\ y &= \psi(\xi,\eta). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Предположим, что функции $\varphi(\xi,\eta)$ и $\psi(\xi,\eta)$ задают взаимно-однозначное отображение области (Δ) плоскости $O\xi\eta$ на область (D) плоскости Oxy. Предположим также, что эти функции имеют непрерывные частные производные в области (Δ) (рис. 1.9).

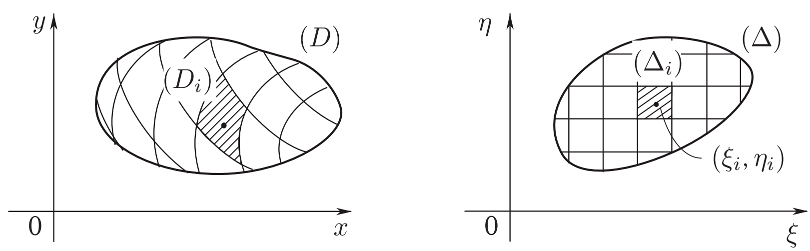

Рис. 1.9

В этом случае очевидно, что квадратному разбиению (Δ_i), $i = 1, \ldots, n$, области (Δ) с помощью преобразования (1.22) будет соответствовать разбиение (D_i), $i = 1, \ldots, n$, области (D), где каждое (D_i) уже представляет собой криволинейный параллелограмм. Площадь D_i криволинейного параллелограмма (D_i) вычисляется по формуле

$$D_i = |J(\xi_i, \eta_i)|\Delta_i, \tag{1.23}$$

где $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta_i$ — некоторая точка, а

$$J(\xi_i, \eta_i) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial\xi_i} & \dfrac{\partial\varphi(\xi_i, \eta_i)}{\partial\eta_i} \\ \dfrac{\partial\psi(\xi_i, \eta_i)}{\partial\xi_i} & \dfrac{\partial\psi(\xi_i, \eta_i)}{\partial\eta_i} \end{vmatrix}$$

— определитель Якоби преобразования (1.22) в точке (ξ_i, η_i) (доказательство формулы (1.23) не приводим).

Теперь мы можем вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) D_i =$$
$$= \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i, \eta_i), \psi(\xi_i, \eta_i))|J(\xi_i, \eta_i)|\Delta_i =$$
$$= \iint\limits_{(\Delta)} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))|J(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta.$$

Итак, мы получили *формулу замены переменных в двойном интеграле* в общем случае:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))|J(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta. \tag{1.24}$$

Замечание 1.6.1. Формула (1.21) является частным случаем формулы (1.24), поскольку определитель Якоби преобразования (1.19) есть определитель $J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

§ 1.7. Двойной интеграл в полярных координатах

Рассмотрим частный случай замены переменных, который часто применяется при вычислениях двойных интегралов. Это — замена декартовых координат x и y полярными координатами r и φ.

Как мы знаем (см. «Высшая математика. Основы математического анализа», § 7.3) преобразование полярных координат в прямоугольные декартовы осуществляется формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.25}$$

Вычислим определитель Якоби преобразования (1.25):

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \geqslant 0.$$

Теперь предположим, что функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в области (D), которая ограничена лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и непрерывной кривой

$$r = r(\varphi),$$

где $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ (рис. 1.10).

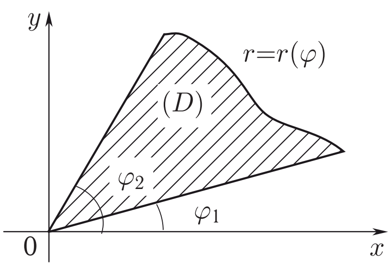

Рис. 1.10

Применяя формулу (1.24) замены переменных в двойном интеграле получим следующую *формулу вычисления двойного интеграла в полярных координатах*:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr. \tag{1.26}$$

Пример 1.7.1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{x^2+y^2} dx\,dy.$$

Произведем замену переменных (1.25), т. е. перейдем к полярным координатам и применим формулу (1.26). Тогда получим

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} e^{x^2+y^2}dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R e^{r^2} r\,dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(e^{R^2}-1\right)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{R^2}-1\right)\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi\left(e^{R^2}-1\right).$$

□

§ 1.8. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна в трехмерной области (D) с кусочно-гладкой границей. Произведем произвольную замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\xi, \eta, \zeta), \\ y &= \psi(\xi, \eta, \zeta), \\ z &= \chi(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \tag{1.27}$$

в тройном интеграле

$$\iiint\limits_{(D)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \tag{1.28}$$

где предполагаем, что функции $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ и $\chi(\xi, \eta, \zeta)$ задают взаимно-однозначное отображение некоторой области (Δ) пространства $O\xi\eta\zeta$ на область (D) пространства $Oxyz$. Предположим также, что эти функции имеют непрерывные частные производные в области (Δ).

В сделанных предположениях справедлива следующая *формула замены переменных в тройном интеграле*:

$$\iiint\limits_{(D)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{(\Delta)} f\left[\varphi(\xi, \eta, \zeta), \psi(\xi, \eta, \zeta), \chi(\xi, \eta, \zeta)\right]|J(\xi, \eta, \zeta)|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \tag{1.29}$$

где

$$J(\xi,\eta,\zeta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta} & \dfrac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta} \\[2ex] \dfrac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta} & \dfrac{\partial\psi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta} \\[2ex] \dfrac{\partial\chi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\chi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\eta} & \dfrac{\partial\chi(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta} \end{vmatrix}$$

является определителем Якоби преобразования (1.27).

Доказательство формулы (1.29) аналогично доказательству соответствующей формулы (1.24) для двойного интеграла.

§ 1.9. Тройной интеграл в сферических координатах

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. *Сферические*, или *полярные*, *координаты* в пространстве связаны с прямоугольными декартовыми координатами следующими формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta, \end{cases} \tag{1.30}$$

где $0 \leqslant r < +\infty, \quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$

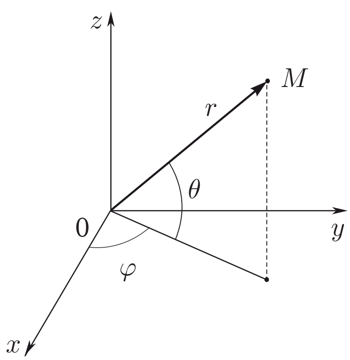

Рис. 1.11

Геометрический смысл сферических координат (r,φ,θ) точки M ясен из рис. 1.11: r есть длина радиус вектора $\overrightarrow{OM}$, θ — угол между этим вектором и его проекцией на плоскость Oxy, а φ — угол между указанной проекцией и положительным направлением оси Ox, отсчитываемый от этой оси против часовой стрелки.

Вычислим определитель Якоби преобразования (1.30):

$$J(r,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta\end{vmatrix}=r^2\cos\theta.$$

Следовательно, *при переходе к сферическим (полярным) координатам подынтегральная функция тройного интеграла умножится на* $r^2\cos\theta$.

Пример 1.9.1. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{(D)} xyz\,dx\,dy\,dz,$$

где (D) — область точек с положительными координатами, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и сферой $x^2+y^2+z^2=1$.

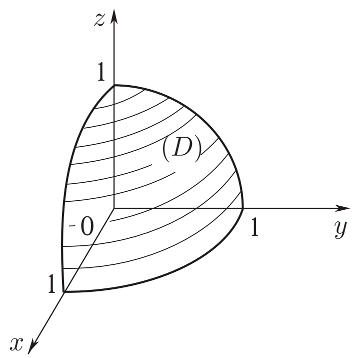

Рис. 1.12

Введем сферические координаты по формулам (1.30). Тогда нетрудно заметить, что область (D) определяется следующими неравенствами (см. рис. 1.12):

$$0\leqslant r\leqslant 1,$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$
$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Согласно формуле (1.29) имеем

$$\iiint\limits_{(D)} xyz\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^1 r^5\cos^3\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\,dr=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left(-\cos^3\theta\right)\,d\cos\theta\int\limits_0^{\pi/2}(-\cos\varphi)\,d\cos\varphi\int\limits_0^1 r^5dr=$$

$$=\frac{\cos^4\theta}{4}\Bigg|_0^{\pi/2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}\cdot\frac{r^6}{6}\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{48}.$$

□

§ 1.10. Тройной интеграл в цилиндрических координатах

В трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ зададим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$. Произвольная точка $M(x, y, z) \in \in \mathbf{R}^3$ определяется также тройкой чисел (r, φ, z), где z, по-прежнему, ее аппликата, а (r, φ) — полярные координаты точки (x, y) в плоскости Oxy в предположении, что полярная ось совпадает с положительным направлением оси Ox (рис. 1.13).

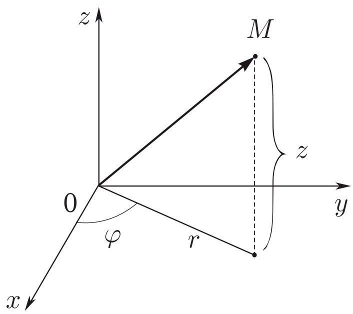

Рис. 1.13

Координаты (r, φ, z) называются *цилиндрическими координатами точки* M.

Формулы перехода к цилиндрическим координатам выглядят так:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{1.31}$$

Вычислим определитель Якоби этого преобразования:

$$J(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Итак, *при переходе к цилиндрическим координатам подынтегральная функция тройного интеграла умножается на* r.

Пример 1.10.1. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{(D)} \sqrt{x^2 + y^2}\; x^2 z\, dx\, dy\, dz,$$

где (D) — область, ограниченная плоскостями $z = 0$, $z = 2$ и поверхностью $x^2 + y^2 = 1$.

В пространстве введем цилиндрические координаты по формулам (1.31). Тогда нетрудно заметить, что область (D) определяется следующими неравенствами (см. рис. 1.14):

$$0 \leqslant r \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$0 \leqslant z \leqslant 2.$$

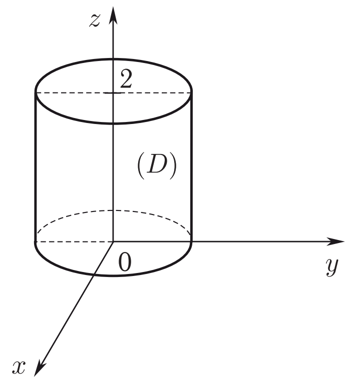

Рис. 1.14

Согласно формуле (1.29) имеем

$$\iiint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\; x^2 z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^4 \cos^2\varphi\, z\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} cos^2\varphi\,d\varphi \int\limits_0^2 z\,dz = \frac{r^5}{5}\bigg|_0^1 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1+\cos 2\varphi)\,d\varphi \cdot \frac{z^2}{2}\bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\Big(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big)\bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{5}.$$

$\square$

Глава 2

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 2.1. Скалярные и векторные поля. Линии и поверхности уровня

Величина называется *скалярной*, если она вполне характеризуется своим численным значением.

Примерами скалярных величин являются объем, масса, плотность, температура и т. д.

Величина, для определения которой помимо ее численного значения следует указать еще направление, называется *векторной*.

Перемещение, скорость, ускорение, сила и т. д. являются векторными величинами.

Определение 2.1.1. Пусть D некоторое подмножество пространства $\mathbf{R}^3$. Говорят, что на множестве D задано *скалярное* (*векторное*) *поле*, если с каждой точкой $M \in D$ связана некоторая скалярная (векторная) величина.

Примером скалярного поля может служить поле температуры или электрического потенциала, а примером векторного поля — поле скоростей или силовое поле.

Заметим, что задание скалярного поля на множестве $D \subset \subset \mathbf{R}^3$ равносильно заданию некоторого отображения $f : D \mapsto \mathbf{R}$ или, что то же самое, заданию функции трех переменных $u = = f(x, y, z)$, если в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ фиксирована некоторая прямоугольная декартова система координат $Oxyz$.

Геометрической характеристикой скалярного поля служат так называемые *поверхности уровня*, т. е. геометрическое место точек, в которых данное скалярное поле или функция $u = f(x, y, z)$ принимает одно и то же значение. Поверхность уровня определяется уравнением

$$f(x, y, z) = C, \quad \text{где} \quad C = \text{const}.$$

В случае поля температуры, создаваемого в однородной и изотропной среде точечным источником тепла, поверхности уровня будут сферами с центром в тепловом источнике.

В случае бесконечной равномерно нагретой нити поверхностями уровня будут круговые цилиндры, ось которых совпадает с нитью.

Пример 2.1.1. Построить поверхность уровня скалярного поля
$$u = x - 2y + 3z.$$

Поверхности уровня определяются уравнением
$$x - 2y + 3z = C, \quad \text{где} \quad C = \text{const},$$
а это есть однопараметрическое семейство параллельных плоскостей. □

Пусть на плоскости или в некоторой ее части дано скалярное поле, т. е. задана некоторая функция $z = f(x, y)$. В этом случае геометрические места точек, которые удовлетворяют уравнению
$$f(x, y) = C, \quad \text{где} \quad C = \text{const},$$
называются *линиями уровня*.

Пример 2.1.2. Построить линии уровня скалярного поля
$$z = x^2 + y^2.$$

Линии уровня определяются уравнением
$$x^2 + y^2 = C, \quad \text{где} \quad C = \text{const},$$
а это представляет собой пустое множество, если $C < 0$; начало координат O, если $C = 0$, или окружность с центром в начале координат радиуса C, если $C > 0$. □

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ фиксирована некоторая прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Задание векторного поля на множестве $D \subset \mathbf{R}^3$ равносильно заданию некоторой вектор-функции
$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k},$$
или, кратко,
$$\vec{a} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k},$$
где P, Q и R — функции трех переменных, определенных на множестве $D \subset \mathbf{R}^3$.

Если P, Q и R — непрерывные функции, то говорят, что задано *непрерывное векторное поле* $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$.

§ 2.2. Криволинейные интегралы первого рода

Рассмотрим следующую механическую задачу, которая приводит к понятию криволинейного интеграла первого рода.

З а д а ч а. Пусть дана непрерывная плоская спрямляемая кривая (L), вдоль которой расположены массы с линейной плотностью $\rho(M)$, где M — произвольная точка кривой (L). Требуется вычислить массу всей кривой (L).

Р е ш е н и е. Разобьем кривую (L) на части с помощью точек $A_0 = A$, A_1, ..., $A_n = B$, где A и B — концевые точки кривой (L). Возьмем произвольную точку M_i на дуге $A_{i-1}A_i$, $i = 1, \ldots, n$, и предположим, что во всех точках этой дуги плотность массы примерно равна $\rho(M_i)$ (рис. 2.1).

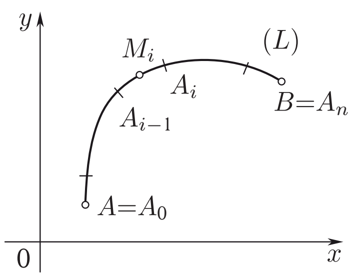

Рис. 2.1

Тогда масса m_i дуги $A_{i-1}A_i$ приближенно равна

$$m_i \approx \rho(M_i)\, l_i,$$

где l_i — длина дуги $A_{i-1}A_i$. Следовательно, для массы всей кривой получим следующее приближенное выражение:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\, l_i.$$

Стало быть, точное значение массы есть предел:

$$m = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\, l_i, \tag{2.1}$$

где d есть наибольшая из длин l_i, $i = 1, \ldots, n$.

Теперь, отвлекаясь от рассмотренной выше задачи, рассмотрим непрерывную функцию двух переменных $f(x, y)$, определенную на кривой (L). Повторяя проделанный выше процесс, составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, l_i,$$

где (ξ_i, η_i) — координаты точки M_i.

Определение 2.2.1. Если существует предел

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\, l_i \tag{2.2}$$

независимо от способа дробления кривой (L) и выбора точек $M_i(\xi_i,\eta_i)$, то он называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x,y)$ по кривой (L) и обозначается

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\, dl. \tag{2.3}$$

Итак,

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\, dl = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\, l_i. \tag{2.4}$$

Аналогичным образом вводится понятие криволинейного интеграла первого рода от функции трех переменных $f(x,y,z)$ по пространственной кривой (L):

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\, dl = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\, l_i.$$

Замечание 2.2.1. Из приведенного выше определения следует, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования, т. е. если $(L) = (AB)$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\, dl = \int\limits_{(BA)} f(x,y)\, dl. \tag{2.5}$$

Учитывая определение криволинейного интеграла первого рода (2.4), полученное выше выражение (2.1) для массы m кривой (L) может быть переписано в виде

$$m = \int\limits_{(L)} \rho(x,y)\, dl. \tag{2.6}$$

Эта формула в частном случае $\rho(x,y) = 1$ превращается в формулу длины кривой (L):

$$L = \int\limits_{(L)} dl. \tag{2.7}$$

§ 2.3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

В этом параграфе покажем, что вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению обычного определенного интеграла.

Пусть плоская кривая (L) задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{2.8}$$

где $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны вместе со своими производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Из формулы вычисления длины дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями (см. «Высшая математика. Основы математического анализа», § 9.14) вытекает следующее выражение для *дифференциала дуги кривой*:

$$dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{2.9}$$

Подставляя это значение в (2.3), получим *формулу вычисления криволинейного интеграла первого рода через определенный интеграл*:

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{2.10}$$

Аналогичная формула имеет место и для криволинейного интеграла первого рода от функции трех переменных $f(x, y, z)$ по пространственной кривой (L), заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \tag{2.11}$$

где $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)\,dl =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\;dt. \quad (2.12)$$

В случае, когда кривая (L) задана явным уравнением

$$y = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$, формула (2.10) принимает следующий вид:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\;dx. \quad (2.13)$$

Пример 2.3.1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_{(L)} x^2y\,dl,$$

где (L) — отрезок, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(2,4)$.

Отрезок OA задается уравнением $y=2x$, когда x пробегает отрезок $[0,2]$. По формуле (2.13) имеем

$$\int\limits_{(L)} x^2y\,dl = \int\limits_0^2 x^2\cdot 2x\sqrt{1+[(2x)']^2}\;dx = 2\sqrt{5}\int\limits_0^2 x^3\,dx = 8\sqrt{5}\,. \qquad \square$$

§ 2.4. Криволинейные интегралы второго рода

Пусть (L) — непрерывная плоская спрямляемая кривая, а $f(x,y)$ — непрерывная функция, заданная на этой кривой. Как и в предыдущем параграфе, разобьем кривую (L) на части с помощью точек $A_0(x_0,y_0)=A$, $A_1(x_1,y_1)$, ..., $A_n(x_n,y_n)=B$, где A и B — концевые точки кривой (L). Предположим, что кривая (L) ориентирована, т. е. задано одно из двух направлений движения по кривой (L). Допустим, что это есть направление от A к B (рис. 2.2).

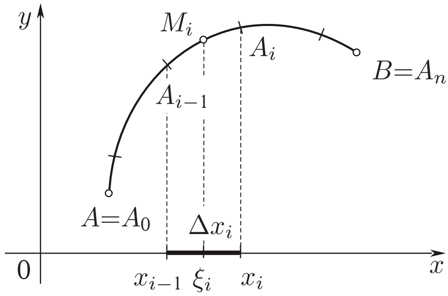

Рис. 2.2

Возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ на дуге $A_{i-1}A_i$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ есть проекция дуги $A_{i-1}A_i$ на ось Ox.

Определение 2.4.1. Если существует

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_i, \tag{2.14}$$

где $d = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$, независимо от способа дробления кривой (L) и выбора точек $M_i(\xi_i, \eta_i)$, то он называется *криволинейным интегралов второго рода* функции $f(x, y)$ и обозначается

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\, dx. \tag{2.15}$$

Итак,

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\, dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_i. \tag{2.16}$$

Точно такими же рассуждениями можно было определить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{(L)} f(x, y)\, dy = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i, \tag{2.17}$$

где Δy_i, $i = 1, \ldots, n$, есть проекция дуги $A_{i-1}A_i$ на ось Oy.

З а м е ч а н и е 2.4.1. Если кривая (L) представляет собой прямолинейный отрезок (AB), параллельный оси Oy (соответственно Ox), то криволинейный интеграл второго рода (2.15) (соответственно (2.17)) равен нулю, поскольку в этом случае $\Delta x_i = 0$ (соответственно $\Delta y_i = 0$) для всех $i = 1, \ldots, n$.

Теперь предположим, что на кривой (L) заданы две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, что эквивалентно заданию на кривой (L) векторного поля

$$\vec{a}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}.$$

Криволинейным интегралом второго рода общего вида или, просто, криволинейным интегралом второго рода вектора $\vec{a}(x, y)$ *по кривой* (L) называется

$$\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + \int\limits_{(L)} Q(x, y)\,dy. \quad (2.18)$$

Точно таким же образом определяется криволинейный интеграл второго рода вектора

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

по пространственной кривой (L):

$$\int\limits_{(L)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{(L)} P(x, y, z)\,dx + \int\limits_{(L)} Q(x, y, z)\,dy + \int\limits_{(L)} R(x, y, z)\,dz. \quad (2.19)$$

Из определения криволинейного интеграла второго рода непосредственно следует, что *если изменить направление ориентации на кривой* (L), *то криволинейный интеграл второго рода* (2.18) *изменит свой знак*, т. е. если $(L) = (AB)$, то

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int\limits_{(BA)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \quad (2.20)$$

§ 2.5. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Связь с криволинейным интегралом первого рода

Вычисление криволинейного интеграла второго рода может быть сведено к вычислению обычного определенного интеграла.

Пусть плоская кривая $(L) = (AB)$ задана параметрическими уравнениями:
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{2.21}$$
где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные вместе со своими производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ функции, определенные на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем начальная точка A соответствует значению параметра $t = \alpha$, а конечная точка B — значению $t = \beta$. Рассмотрим непрерывную на кривой (AB) функцию $P(x, y)$. Справедлива следующая формула вычисления криволинейного интеграла второго рода:
$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, dt. \tag{2.22}$$

Докажем последнюю формулу. По определению криволинейного интеграла второго рода (см. (2.16)) имеем
$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)\, dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i =$$
$$= \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})). \tag{2.23}$$

По теореме Лагранжа (см. «Высшая математика. Основы математического анализа», (6.33))
$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$
где $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Учитывая последнее равенство и полагая $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $\eta_i = \psi(\tau_i)$, из (2.23) окончательно получим
$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)\, dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\, \varphi'(\tau_i)\, \Delta t_i =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Итак, формула (2.22) доказана.

Точно таким же образом можно доказать формулу

$$\int\limits_{(AB)} Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)\,dt. \tag{2.24}$$

Складывая почленно полученные равенства (2.22) и (2.24), получим

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \\ = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t)]\,dt. \tag{2.25}$$

В случае пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \tag{2.26}$$

$t \in [\alpha,\beta]$, формула (2.25) примет вид

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \\ = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + \\ + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\big]\,dt. \tag{2.27}$$

Пусть теперь плоская кривая (AB) задана явным уравнением $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, где функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Приняв x за параметр, для кривой (AB) получим параметрическое представление

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$$

где $x \in [a,b]$. Следовательно, в этом случае формула (2.25) примет вид

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} [P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)]\,dx. \tag{2.28}$$

Пример 2.5.1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{(L)} x^2y\,dx + x^3\,dy,$$

где (L) — парабола $y = x^2$, соединяющая точки $O(0,0)$ и $A(1,1)$ (рис. 2.3).

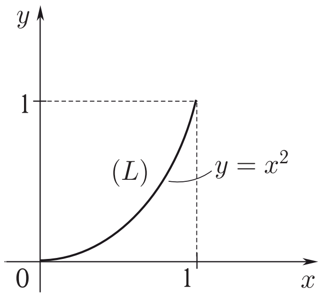

Рис. 2.3

По формуле (2.28) имеем

$$\int\limits_{(L)} x^2y\,dx + x^3\,dy = \int\limits_0^1 [x^2\cdot x^2 + x^3\cdot 2x]\,dx = 3\int\limits_0^1 x^4\,dx = \frac{3}{5}. \qquad \square$$

Пусть $\vec{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичный вектор касательной к кривой (L) в произвольной ее точке $M(x,y,z)$ (α, β, γ — углы, образованные касательной к кривой (L) с осями Ox, Oy и Oz соответственно). Тогда справедливы равенства

$$dx = \cos\alpha\,dl, \quad dy = \cos\beta\,dl, \quad dz = \cos\gamma\,dl,$$

где dl — дифференциал дуги кривой. Эти равенства позволяют *выразить криволинейный интеграл второго рода через криволинейный интеграл первого рода*:

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{(L)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl, \tag{2.29}$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{(L)} (\vec{a}, \vec{t}\,)\,dl, \tag{2.30}$$

где $(\vec{a}, \vec{t}\,)$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{t}$.

§ 2.6. Формула Грина

Пусть на плоскости Oxy задана область (S), которая снизу и сверху ограничена кусочно-гладкими кривыми, заданными соответственно уравнениями

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

где $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $x \in [a, b]$, а с боков — прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 2.4).

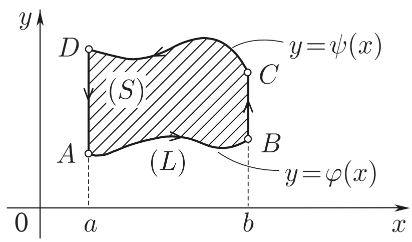

Рис. 2.4

Предположим, что функция двух переменных $P(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ во всех точках области (S), включая ее границу (L). Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{(L)} P(x, y)\, dx, \tag{2.31}$$

где интегрирование по кривой (L) производится в положительном направлении, т. е. при движении вдоль кривой, область (S) остается слева.

Для вычисления двойного интеграла $\iint\limits_{(S)} \dfrac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$ применим формулу (1.15):

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy.$$

Так как

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = P(x, y)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x)),$$

то

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))]\,dx =$$
$$= \int\limits_a^b P(x,\psi(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))\,dx,$$

или, согласно формуле (2.28),

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{(CD)} P(x,y)\,dx - \int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx. \qquad (2.32)$$

Так как отрезки BC и DA перпендикулярны к оси Ox, то в силу замечания 2.4.1 имеем

$$\int\limits_{(BC)} P(x,y)\,dx = 0, \qquad \int\limits_{(DA)} P(x,y)\,dx = 0.$$

Учитывая эти равенства, (2.32) можем переписать в виде

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy =$$
$$= -\int\limits_{(CD)} P(x,y)\,dx - \int\limits_{(DA)} P(x,y)\,dx - \int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx -$$
$$- \int\limits_{(BC)} P(x,y)\,dx = -\int\limits_{(L)} P(x,y)\,dx.$$

Итак, формула (2.31) доказана.

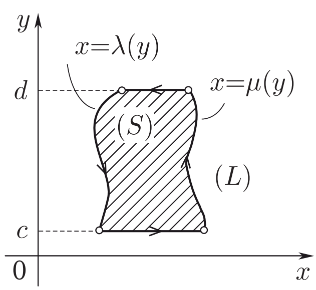

Рис. 2.5

Теперь предположим, что область (S) имеет форму, изображенную на рис. 2.5, т. е. она ограничена кривыми

$$x = \lambda(y), \quad x = \mu(y),$$

где $\lambda(y) \leqslant \mu(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$, и прямыми $y = c$, $y = d$.

Если $Q(x,y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ во всех точках области (S), включая ее границу (L), то точно такими же рассуждениями можно доказать формулу

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{(L)} Q(x, y)\, dy. \tag{2.33}$$

Без доказательства отметим, что *если область (S) ограничена одним или несколькими кусочно-гладкими самонепересекающимися контурами, то для нее одновременно справедливы обе формулы*: (2.31) *и* (2.33).

Вычитая из формулы (2.33) формулу (2.31), окончательно получим

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{(L)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy. \tag{2.34}$$

Эта формула и называется *формулой Грина*.

§ 2.7. Площадь поверхности

Пусть (S) — поверхность в пространстве, заданная явным уравнением

$$z = f(x, y). \tag{2.35}$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ определена в квадрируемой области $(D) \in \mathbf{R}^2$, где она имеет непрерывные частные производные

$$p(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{и} \quad q(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Разложим область (D) с помощью сетки кривых на квадрируемые части:

$$(D_1), (D_2), \ldots, (D_n),$$

и рассмотрим одну из этих частей, (D_i) (рис. 2.6). Построим цилиндрическую поверхность с основанием (D_i) и образующими, параллельными оси Oz. Эта поверхность вырежет на поверхности (S) элемент (S_i).

Возьмем произвольную точку $P_i(x_i, y_i) \in (D_i)$ и в соответствующей точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$, где

$$z_i = f(x_i, y_i),$$

проведем касательную плоскость к поверхности (S). Упомянутая выше цилиндрическая поверхность на этой плоскости вырежет

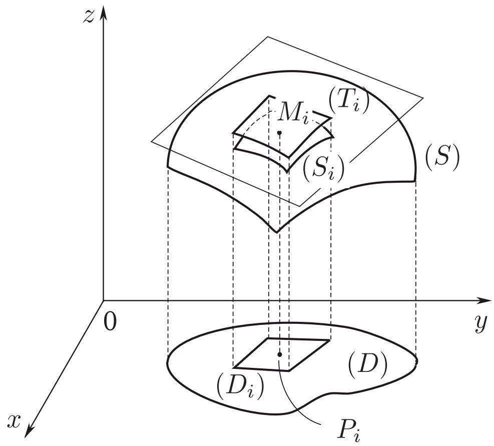

Рис. 2.6

элементарную плоскую фигуру (T_i). Площадь T_i этой фигуры является приближенным значением площади S_i куска поверхности (S_i). Следовательно, сумму всех площадей T_i можно считать приближенным значением для площади S поверхности (S):

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Таким образом, площадь S поверхности (S) естественно определить как предел последней суммы, когда диаметры d_i всех плоских фигур (D_i) стремятся к нулю, или, что то же самое, $d = \max\limits_i \{d_i\} \to 0$. Итак,

$$S = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} T_i. \tag{2.36}$$

Теорема 2.7.1. *Площадь поверхности* (S), *заданной явным уравнением* (2.35) *вычисляется по формуле*

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy. \tag{2.37}$$

Доказательство. Как известно, уравнение касательной плоскости к поверхности (S) в точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$ следующее:

$$z - z_i = f'_x(x - x_i) + f'_y(y - y_i).$$

Следовательно, нормаль в точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$ к этой плоскости есть вектор $\vec{n_i} = (f'_x, f'_y, -1)$. Угол между вектором $\vec{n_i}$ с осью Oz обозначим через α_i. Очевидно, что этот угол равен углу, составленному фигурами (D_i) и (T_i). А из этого следует, что

$$D_i = T_i|\cos\alpha_i|, \tag{2.38}$$

откуда

$$T_i = \frac{1}{|\cos\alpha_i|} \cdot D_i.$$

Заметим, что

$$|\cos\alpha_i| = \left|\frac{\vec{n_i}\cdot\vec{k}}{|\vec{n_i}||\vec{k}|}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)_i^2+(f'_y)_i^2}},$$

где $\vec{k} = (0,0,1)$ — единичный вектор по положительному направлению оси Oz.

Теперь вычислим

$$S = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} T_i = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|\cos\alpha_i|}\cdot D_i = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}(1+p_i^2+q_i^2)\cdot D_i =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dx\,dy,$$

что и требовалось доказать. □

Пусть теперь поверхность (S) задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \tag{2.39}$$

или, что то же самое, векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\cdot\vec{i} + y(u,v)\cdot\vec{j} + z(u,v)\cdot\vec{k},$$

где $(u,v) \in (D) \subset \mathbf{R}^2$. Тогда, исходя из формулы (2.37), можно доказать, что площадь поверхности (S) вычисляется формулой

$$S = \iint\limits_{(D)} |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\,du\,dv, \tag{2.40}$$

или

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \tag{2.41}$$

где

$$\begin{aligned} E &= (\vec{r}\,'_u)^2, \\ F &= \vec{r}\,'_u \cdot \vec{r}\,'_v, \\ G &= (\vec{r}\,'_v)^2\ . \end{aligned} \tag{2.42}$$

§ 2.8. Поверхностные интегралы первого рода

Пусть (S) — некоторая поверхность с кусочно-гладким контуром в трехмерном пространстве. Предположим, что на поверхности (S) задана непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность (S) с помощью сети кусочно-гладких кривых на квадрируемые части $(S_1), (S_2), \ldots, (S_n)$. Возьмем в каждой части (S_i) по произвольной точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Пусть S_i — площадь поверхности (S_i), d_i — ее диаметр, а $d = \max\{d_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 2.8.1. Если существует предел

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) S_i$$

независимо от способа разложения поверхности (S) на части и независимо от выбора точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, то этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $u = f(x, y, z)$ по поверхности (S) и обозначается символом

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS. \tag{2.43}$$

Пусть поверхность (S) задана явным уравнением

$$z = \varphi(x, y),$$

где $(x, y) \in (D) \subset \mathbf{R}^2$.

Тогда, в силу (2.37), элемент площади имеет вид

$$dS = \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}\ dx\, dy,$$

и, следовательно, для вычисления поверхностного интеграла первого рода (2.43) получим формулу

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{(D)} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}\;dx\,dy. \tag{2.44}$$

В случае, когда поверхность (S) задана параметрическими уравнениями (2.39), точно так же применяя (2.40) и (2.41), получим следующие формулы вычисления поверхностного интеграла первого рода:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{(D)} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\,du\,dv, \tag{2.45}$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{(D)} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\;du\,dv. \tag{2.46}$$

§ 2.9. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть (S) — гладкая поверхность в трехмерном пространстве. Поверхность (S) называется *двусторонней*, если нормаль к поверхности при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности (S) и не имеющему общих точек с ее границей (если таковая имеется), возвращается в первоначальное положение. Если это условие выполняется не для всех замкнутых контуров, то такая поверхность называется *односторонней*.

Плоскость, эллипсоид, любая поверхность, задаваемая непрерывно дифференцируемой функцией $z = \varphi(x,y)$, являются примерами двусторонних поверхностей.

Примером односторонней поверхности является *Лист Мёбиуса*, который получается при склеивании сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$, так, чтобы точка A склеивалась с точкой C, а точка B — с точкой D (рис. 2.7).

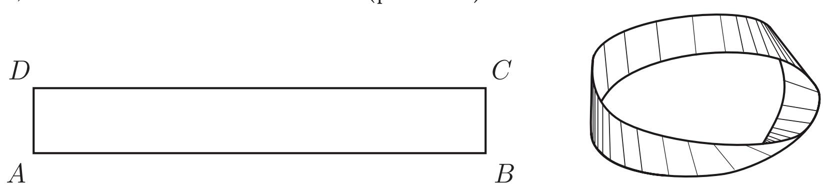

Рис. 2.7

Если выбрано направление нормали к двусторонней поверхности (одно из двух возможных), то поверхность называется *ориентированной*.

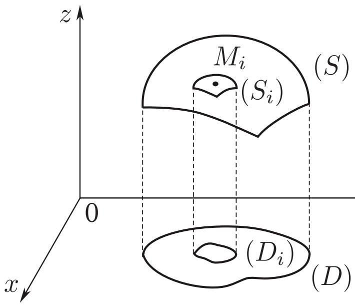

Рис. 2.8

Предположим теперь, что (S) — ориентированная поверхность, на которой задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Разобьем поверхность (S) с помощью сети кусочно-гладких кривых на квадрируемые части $(S_1), (S_2), \ldots, (S_n)$. Возьмем в каждой части (S_i) по произвольной точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Для произвольного i проекцию (S_i) на координатную плоскость Oxy обозначим через (D_i), а площадь последнего — через D_i (рис. 2.8). Пусть $d = \max\{d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$, где d_i — диаметр плоской фигуры (D_i).

Определение 2.9.1. Если существует предел

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) D_i$$

независимо от способа разложения поверхности (S) на части и независимо от выбора точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, то этот предел называется *поверхностным интегралом второго рода* от функции $f(x, y, z)$ по поверхности (S) и обозначается

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy. \tag{2.47}$$

Итак,

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) D_i. \tag{2.48}$$

Точно такими же рассуждениями можно определить поверхностные интегралы второго рода по переменным y, z (когда элементы поверхности проецируются на координатную плоскость Oyz) и по переменным x, z (когда элементы поверхности проецируются на координатную плоскость Oxz):

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dy\, dz, \tag{2.49}$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dz. \tag{2.50}$$

В приложениях чаще всего встречаются соединения интегралов всех трех видов:

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \tag{2.51}$$

где P, Q, R суть функции, определенные на поверхности (S).

Отметим, что *во всех случаях поверхность (S) предполагается ориентированной и что интеграл распространяется на определенную ее сторону*.

З а м е ч а н и е 2.9.1. Если изменить ориентацию поверхности (S), т. е. взять другую ее сторону, то знак поверхностного интеграла второго рода (2.51) изменится.

З а м е ч а н и е 2.9.2. Если (S) — цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz, то все (S_i), $i = 1, \ldots, n$, имеют нулевые проекции и, следовательно,

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = 0. \tag{2.52}$$

§ 2.10. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Пусть поверхность (S) задана явным уравнением

$$z = \varphi(x, y),$$

где $(x, y) \in (D) \subset \mathbf{R}^2$, а функция $\varphi(x, y)$ вместе со своими частными производными непрерывна в области D.

Рассмотрим непрерывную в точках поверхности (S) функцию $f(x, y, z)$. Выберем ту сторону поверхности (S), где нормаль к ней образует с осью Oz острый угол. Тогда все D_i, $i = 1, \ldots, n$, в формуле (2.48) положительны. Подставляя в эту формулу $z_i = \varphi(x_i, y_i)$, получим

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) D_i =$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i))D_i = \iint\limits_{(D)} f(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy.$$

Итак, *поверхностный интеграл второго рода выражается через двойной интеграл формулой*

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{(D)} f(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy. \tag{2.53}$$

Теперь рассмотрим единичную нормаль $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ к поверхности (S), где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали.

Справедливы следующие формулы для элементов площадей (ср. с формулой (2.38)):

$$dx\,dy = \cos\gamma\,dS, \quad dx\,dz = \cos\beta\,dS, \quad dy\,dz = \cos\alpha\,dS. \tag{2.54}$$

Учитывая последние формулы, поверхностные интегралы второго рода (2.47), (2.49) и (2.50) можно выразить через поверхностные интегралы первого рода формулами

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos\gamma\,dS, \tag{2.55}$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)dydz = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos\alpha\,dS, \tag{2.56}$$

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dz = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos\beta\,dS \tag{2.57}$$

соответственно. Следовательно, *поверхностные интегралы второго рода* (2.51) *и поверхностные интегралы первого рода связаны соотношением*

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS \tag{2.58}$$

или, что то же самое,

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS, \tag{2.59}$$

где
$$\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}.$$
— векторное поле, заданное на поверхности (S).

§ 2.11. Поток вектора через ориентированную поверхность

Пусть (S) — ориентированная поверхность в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$, а
$$\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$
— непрерывное векторное поле, заданное на этой поверхности.

Рассмотрим следующую гидромеханическую задачу: *пусть $\vec{a}(x,y,z)$ есть стационарное поле* (*т. е. зависящее от точки, но не зависящее от времени*) *скоростей жидкости, протекающей через поверхность (S) в сторону выбранной ориентации. Требуется определить количество жидкости, которое протекает через эту поверхность за единицу времени.*

Для решения этой задачи поверхность (S) разобьем на части $(S_1), (S_2), \ldots, (S_n)$ (рис. 2.9).

Пусть M_i — произвольная точка, принадлежащая (S_i). Нормаль к поверхности (S) в точке M_i обозначим через $\vec{n}_i$, а значение векторного поля — через $\vec{a}_i$. Теперь нетрудно заметить, что количество жидкости, протекающей через (S_i) в направлении $\vec{n}_i$ за единицу времени, равно объему цилиндрической поверхности с основанием (S_i) и высотой $H = pr_{\vec{n}_i}\vec{a}_i = (\vec{a}_i \cdot \vec{n}_i)$:
$$(\vec{a}_i \cdot \vec{n}_i)\,S_i,$$

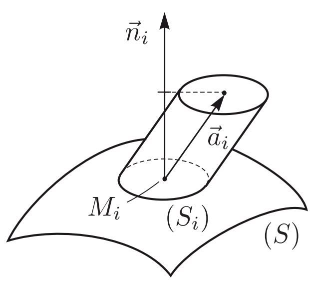

Рис. 2.9

где S_i — площадь (S_i). Следовательно, количество жидкости по всей поверхности (S) равно
$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\vec{a}_i \cdot \vec{n}_i)\,S_i = \iint\limits_{(S)}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS,$$
где $d = \max\{\operatorname{diam}(S_i),\ i = 1,\ldots,n\}$.

Этим и объясняется следующее определение.

Определение 2.11.1. Поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS$$

называется также *потоком вектора* $\vec{a}(x,y,z)$ *через ориентированную поверхность* (S).

§ 2.12. Формула Гаусса–Остроградского. Дивергенция

Пусть $(V) \subset \mathbf{R}^3$ — некоторое тело, ограниченное гладкими поверхностями (S_1) и (S_2), заданными функциями

$$z = \varphi(x,y) \quad \text{и} \quad z = \psi(x,y), \quad (\varphi(x,y) \leqslant \psi(x,y),\ (x,y) \in D)$$

соответственно, и цилиндрической поверхностью (S_3), образующие которой параллельны оси Oz (рис. 2.10).

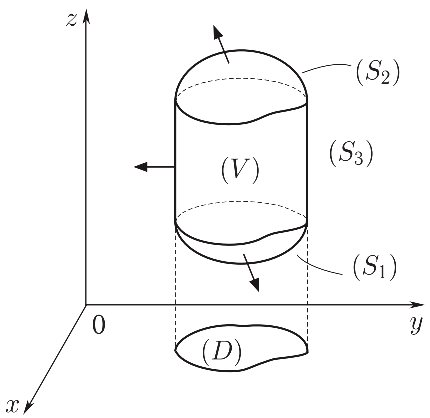

Рис. 2.10

Допустим, что в области (V) задана некоторая функция $R(x,y,z)$, которая вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывна во всей области (V), включая ее границу.

Докажем, что в сделанных предположениях справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} R\,dx\,dy, \tag{2.60}$$

где (S) — поверхность, ограничивающая тело (V), а интеграл справа распространен на внешнюю сторону поверхности (S).

Действительно, согласно формуле (1.17) вычисления тройного интеграла, имеем

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(D)} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(D)} R(x, y, \psi(x, y))\, dx\, dy - \iint\limits_{(D)} R(x, y, \varphi(x, y))\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{(S_1)} R(x, y, z)\, dx\, dy + \iint\limits_{(S_2)} R(x, y, z)\, dx\, dy + \iint\limits_{(S_3)} R(x, y, z)\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} R\, dx\, dy.$$

Здесь были учтены равенства

$$\iint\limits_{(S_2)} R(x, y, z)\, dx\, dy = \iint\limits_{(D)} R(x, y, \psi(x, y))\, dx\, dy, \tag{2.61}$$

$$\iint\limits_{(S_1)} R(x, y, z)\, dx\, dy = -\iint\limits_{(D)} R(x, y, \varphi(x, y))\, dx\, dy, \tag{2.62}$$

$$\iint\limits_{(S_3)} R(x, y, z)\, dx\, dy = 0 \tag{2.63}$$

и свойство аддитивности поверхностного интеграла. Равенства (2.61) и (2.62) следуют из формулы вычисления поверхностного интеграла второго рода (2.53), а равенство (2.63) справедливо в силу замечания 2.52.

Точно таким же образом можно доказать формулы

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(S)} P\, dy\, dz, \tag{2.64}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(S)} Q\, dz\, dx, \tag{2.65}$$

если функции P и Q непрерывны в области (V) вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

Сложив все три формулы (2.60), (2.64) и (2.65), получим окончательно

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(S)} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy. \tag{2.66}$$

Формула (2.66) называется *формулой Гаусса–Остроградского*.

Определение 2.12.1. Функция

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{2.67}$$

называется *дивергенцией векторного поля*

$$\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}.$$

Учитывая это определение, а также равенство (2.59), формулу Гаусса–Остроградского можно переписать в виде

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\,dV = \iint\limits_{(S)} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS. \tag{2.68}$$

Итак, формула Гаусса–Остроградского означает, что *поток векторного поля через замкнутую поверхность (S) в направлении внешней нормали равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему (V), ограниченному данной поверхностью.*

§ 2.13. Формула Стокса

Пусть (S) — гладкая ориентированная поверхность в трехмерном пространстве, заданная явным уравнением

$$z = z(x,y), \tag{2.69}$$

где функция $z(x,y)$ определена и непрерывна (вместе со своими частными производными первого порядка) в замкнутой области $(D) \subset \mathbf{R}^2$. Контур, ограничивающий поверхность (S) обозначим через (L), а границу области (D) — через (l) (рис. 2.11).

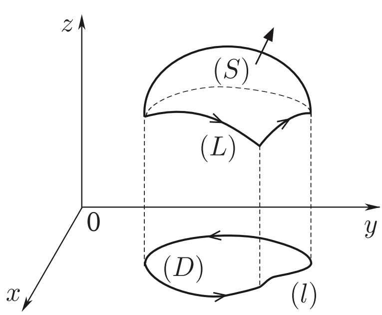

Рис. 2.11

Пусть функция $P(x,y,z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка в некоторой области, целиком содержащей поверхность (S). Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{(L)} P\,dx = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy, \tag{2.70}$$

где направление обхода контура (L) соответствует той стороне поверхности (S), на которую распространен интеграл справа (т. е. при обходе контура (L) поверхность (S) все время остается слева).

Для доказательства формулы (2.70) в силу (2.58) достаточно установить равенство

$$\int\limits_{(L)} P\,dx = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\,\cos\gamma\right) dS, \tag{2.71}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы единичной нормали $\vec{n}$ к поверхности (S).

Так как значения функции $P(x, y, z)$ в точках $M(x, y, z)$ кривой (L) совпадают со значениями функции $P(x, y, z(x, y))$ в соответствующих точках (проекциях этих точек на плоскость Oxy) $M'(x, y)$ кривой (l), то, следовательно,

$$\int\limits_{(L)} P(x, y, z)\,dx = \int\limits_{(l)} P(x, y, z(x, y))\,dx. \tag{2.72}$$

К интегралу в правой части (2.72) применим формулу Грина (2.34) (а точнее, (2.31)):

$$\int\limits_{(l)} P(x, y, z(x, y))\,dx = -\iint\limits_{(D)} \frac{\partial}{\partial y}\,[P(x, y, z(x, y))]\,dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Учитывая формулы (2.53) и (2.55), последнее равенство перепишем в виде

$$\int\limits_{(l)} P(x, y, z(x, y))\,dx = -\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cos\gamma\,dS. \tag{2.73}$$

Как известно, вектор $(-z'_x, -z'_y, 1)$ является нормальным вектором к поверхности (S), заданной уравнением (2.69) (см. «Высшая математика. Основы математического анализа», (10.37) и (10.40)). Иначе говоря, вектор $(-z'_x, -z'_y, 1)$ коллинеарен единичной нормали $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Следовательно,

$$\frac{-z'_x}{\cos\alpha} = \frac{-z'_y}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos\gamma}.$$

Откуда получаем

$$-\frac{dz}{dy} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Подставляя это выражение в (2.73), получим

$$\int\limits_{(l)} P(x, y, z(x, y))\,dx = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cos\gamma\,dS = \\ = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\,\cos\gamma\right) dS.$$

Последнее равенство вместе с (2.72) и (2.71) дает формулу (2.70).

Итак, формула (2.70) доказана.

Путем циклической перестановки переменных x, y и z получим еще два равенства, строгое доказательство которых можно провести аналогично доказательству формулы (2.70):

$$\int\limits_{(L)} Q\,dy = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz, \tag{2.74}$$

$$\int\limits_{(L)} R\,dz = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y}\,dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x}\,dz\,dx, \tag{2.75}$$

где Q и R — новые функции, удовлетворяющие тем же условиям, что и P.

Складывая все три равенства (2.70), (2.74) и (2.75), окончательно получаем формулу

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \\ = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx. \tag{2.76}$$

Это равенство и называется *формулой Стокса*, которая связывает поверхностный интеграл второго рода по поверхности (S) с криволинейным интегралом второго рода по контуру (L), ограничивающему поверхность (S).

Замечание 2.13.1. Формула Стокса в случае $z = 0$ превращается в формулу Грина. Стало быть, формула Грина является частным случаем формулы Стокса.

Формулу Стокса, если в ней поверхностный интеграл второго рода заменить поверхностным интегралом первого рода по формуле (2.58), можно представить также в виде

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS, \quad (2.77)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — *направляющие косинусы нормали, отвечающий выбранной стороне поверхности.*

§ 2.14. Линейный интеграл от вектора. Циркуляция. Ротор

Пусть (L) — непрерывная спрямляемая кривая в пространстве $\mathbf{R}^3$, на которой дано некоторое векторное поле

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}.$$

Криволинейный интеграл второго порядка

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \quad (2.78)$$

называется также *линейным интегралом от вектора* $\vec{a}$ *по кривой* (L). В случае замкнутой кривой (L) последний интеграл называется *циркуляцией вектора* (*или вектороного поля*) $\vec{a}$ *по кривой* (L).

Определение 2.14.1. Вектор с координатами

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

называется *ротором* или *вихрем* векторного поля $\vec{a}$ и обозначается символом $\operatorname{rot}\vec{a}$.

Итак, по определению

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Введем символический вектор ∇ («набла»):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

который называется *оператором Гамильтона*. Заметим, что с помощью этого вектора ротор векторного поля $\vec{a}$ можно определить так:

$$\operatorname{rot}\,\vec{a} = \nabla\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Используя понятия циркуляции и ротора векторного поля и учитывая (2.30) и (2.77), *формулу Стокса* (2.76) *в векторной форме* можно записать в виде

$$\int\limits_{(L)} (\vec{a},\vec{t})\,dl = \iint\limits_{(S)} (\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,dS, \tag{2.79}$$

где $\vec{t}$ — единичный вектор касательной к кривой (L), а $\vec{n}$ — нормаль поверхности (S).

Последняя формула означает, что *циркуляция вектора вдоль замкнутого контура равна потоку ротора этого вектора через поверхность, ограниченную этим контуром. При этом направление обхода контура и сторона поверхности должны соответствовать друг другу.*

Замечание 2.14.1. Понятие ротора имеет ясное физическое истолкование: *если* $\vec{V}$ *— поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси, то* $\operatorname{rot}\vec{V}$ *— мгновенная угловая скорость вращения (с точностью до постоянного множителя)*. Отсюда и само название «ротор».

§ 2.15. Потенциальное поле

Пусть в некоторой области Ω пространства $\mathbf{R}^3$ дано векторное поле

$$\vec{a} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}.$$

Определение 2.15.1. *Потенциальной функцией*, или *потенциалом*, векторного поля $\vec{a}$ называется функция $U(x,y,z)$, такая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R, \tag{2.80}$$

или, что то же самое, вектор $\vec{a}$ совпадает с градиентом функции $U(x,y,z)$:

$$\operatorname{grad} U = \vec{a}. \tag{2.81}$$

Если вектор $\vec{a}$ имеет потенциальную функцию, то тогда векторное поле $\vec{a}$ называется *потенциальным* (или *безвихревым*, или *градиентным*).

Теорема 2.15.1. *Векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным в области Ω тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий*:

1. *Криволинейный интеграл второго рода от вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру L, принадлежащему Ω, равен нулю*:

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

2. *Криволинейный интеграл второго рода от вектора $\vec{a}$ по любому кусочно-гладкому пути L, принадлежащему Ω и соединяющему точку A с точкой B, не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от положения точек A и B.*

Доказательство. Прежде всего докажем эквивалентность условий 1 и 2.

Пусть справедливо условие 1. Рассмотрим две произвольные точки A и B области Ω. Соединим эти точки произвольными кривыми L' и L'', лежащими в Ω и ориентированными от A к B (рис. 2.12).

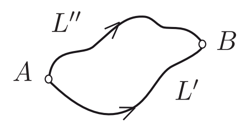

Рис. 2.12

Рассмотрим замкнутую кривую $L = L' + L''_-$, где L''_- — кривая L'', ориентированная от B к A. Согласно условию 1

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \\ = \int\limits_{L'} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int\limits_{L''_-} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

откуда и получаем

$$\int\limits_{L'} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{L''} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

т. е. криволинейный интеграл второго рода от вектора $\vec{a}$ не зависит от пути интегрирования. Тем самым свойство 2 доказано.

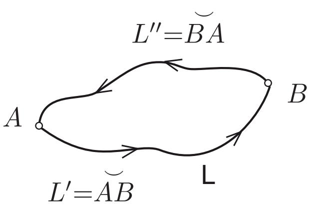

Рис. 2.13

Теперь докажем обратное. Пусть верно свойство 2. Рассмотрим произвольный замкнутый контур L, принадлежащий области Ω. На кривой L возьмем две произвольные точки A и B. В результате кривая L разобьется на две кривые L' и L'': $L = L' + L''$ (рис. 2.13).

Согласно свойству 2 имеем

$$\int\limits_{L'} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{L''_-} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Учитывая это равенство, имеем

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \\ = \int\limits_{L'} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int\limits_{L''} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \\ = \int\limits_{L''_-} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int\limits_{L''} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

что и доказывает свойство 1.

Теперь докажем необходимость утверждения теоремы. Предположим, что векторное поле потенциальное, т. е. вектор $\vec{a}$ имеет в области Ω потенциальную функцию $U(x,y,z)$. Докажем, что тогда справедливо свойство 2.

Пусть $A_0(x_0,y_0,z_0)$ — некоторая фиксированная, а $A(x,y,z)$ — произвольная переменная точки области Ω. Точки A_0 и A соединим непрерывной кусочно-гладкой кривой L, ориентированной от A_0 к A и заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau),$$

где $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, причем значениям t_0 и t параметра τ соответствуют точки A_0 и A соответственно.

Рассмотрим сложную функцию $U(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ и продифференцируем ее по переменной τ согласно формуле дифференцирования сложной функции (см. «Высшая математика. Основы математического анализа», (10.17)):

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{d\tau}. \tag{2.82}$$

Учитывая равенства (2.80) и (2.82), вычислим криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ по формуле (2.27):

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{t_0}^{t} \big(Px'(\tau) + Qy'(\tau) + Rz'(\tau)\big)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\,x'(\tau) + \frac{\partial U}{\partial y}\,y'(\tau) + \frac{\partial U}{\partial z}\,z'(\tau)\right) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dU}{d\tau}\,d\tau =$$

$$= U[x(t), y(t), z(t)] - U[x(t_0), y(t_0), z(t_0)] =$$

$$= U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0) = U(A) - U(A_0). \tag{2.83}$$

Итак,

$$\int\limits_L P dx + Q\,dy + R\,dz = U(A) - U(A_0), \tag{2.84}$$

откуда и следует, что криволинейный интеграл второго рода от вектора $\vec{a}$ зависит только от положения точек A_0 и A, но не от пути, соединяющий эти точки. Этим и доказано свойство 2.

Теперь докажем достаточность утверждения теоремы. Предположим, что выполняется условие 2 и докажем, что тогда существует определенная на Ω потенциальная функция вектора $\vec{a}$.

Пусть $A_0(x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка области Ω. Определим функцию

$$V(x, y, z) = \int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где L — произвольная кривая, соединяющая точку $A_0(x_0, y_0, z_0)$ с переменной точкой $A(x, y, z)$. Такое определение функции $V(x, y, z)$, корректное в силу условия 2.

Докажем, что $V(x, y, z)$ является искомой потенциальной функцией вектора $\vec{a}$, т. е. что для функции $V(x, y, z)$ справедливы равенства (2.80).

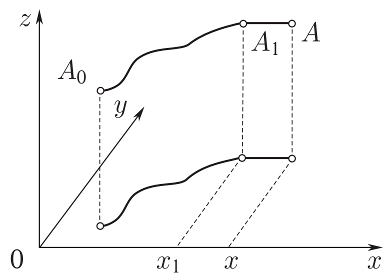

Рис. 2.14

Точку A_0 соединим с точкой A специальной кривой

$$L_{A_0A} = L_{A_0A_1} + L_{A_1A} \subset \Omega,$$

которая заканчивается некоторым отрезком A_1A $(A_1 = (x_1, y_1, z_1))$, параллельным оси Ox (рис. 2.14). Тогда

$$V(x, y, z) = \int\limits_L P dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{L_{A_0A_1}} P dx + Q\,dy + R\,dz +$$

$$+ \int\limits_{L_{A_1A}} P dx + Q\,dy + R\,dz = C + \int\limits_{x_1}^{x} P(t, y, z)\,dt, \quad (2.85)$$

где $C = \int\limits_{L_{A_0A_1}} P dx + Q\,dy + R\,dz$ — постоянная величина, не зависящая от переменной точки $A(x, y, z)$, а

$$\int\limits_{L_{A_1A}} P dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{x_1}^{x} P(t, y, z)\,dt,$$

так как на отрезке A_1A имеем: $dy = dz = 0$. Учитывая равенство (2.85), вычислим частную производную $\dfrac{\partial V}{\partial x}$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{x_1}^{x} P(t, y, z)\,dt = P(x, y, z).$$

Точно такими же рассуждениями можно доказать равенства

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Итак, $V(x, y, z)$ — потенциальная функция вектора $\vec{a}$.

Теорема полностью доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 2.15.1. Формула (2.84) доказывает, что если $U(x, y, z)$ является потенциальной функцией вектора $\vec{a}$, то тогда криволинейный интеграл второго рода вектора $\vec{a}$ равен разности значений потенциала $U(x, y, z)$ в конечной и начальной точках пути интегрирования. Эта формула называется *обобщенной формулой Ньютона–Лейбница*.

З а м е ч а н и е 2.15.2. Теорема 2.15.1 позволяет дать другое эквивалентное определение понятия потенциального векторного поля: *векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным в области Ω, если циркуляция этого поля по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, расположенной в области Ω, равна нулю.*

Трехмерная область Ω называется *поверхностно-односвязной*, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой L, лежащей в Ω, существует такая ориентированная кусочно-гладкая поверхность S, также лежащая в Ω, границей которой является L.

Т е о р е м а 2.15.2. *Непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным в поверхностно-односвязной области Ω тогда и только тогда, когда в этой области* $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость утверждения теоремы справедлива без предположения поверхностной односвязности области Ω.

Пусть непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным в области Ω. Рассмотрим потенциальную функцию $U(x, y, z)$ вектора $\vec{a}$. Имеем,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Учитывая последние равенства, легко убедиться, что

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0,$$

т. е. $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$.

Достаточность теоремы следует из формулы Стокса (2.76) и теоремы 2.15.1.

Теорема доказана. □

§ 2.16. Соленоидальное поле

Пусть Ω — некоторая область пространства $\mathbf{R}^3$, а

$$\vec{a} = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

— векторное поле, заданное в этой области.

Векторное поле $\vec{a}$ называется *соленоидальным* (*трубчатым*), если дивергенция вектора $\vec{a}$ по области Ω равна нулю: $\operatorname{div} \vec{a} = 0$.

Трехмерная область Ω называется *объемно-односвязной*, если любая замкнутая кусочно-гладкая самонепересекающаяся ориентированная поверхность S, лежащая в Ω, является границей некоторой области, также лежащей в Ω.

Теорема 2.16.1. *Непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ является соленоидальным в объемно-односвязной области Ω тогда и только тогда, когда поток этого вектора через любую замкнутую кусочно-гладкую самонепересекающуюся ориентированную поверхность S, расположенную в Ω, равен нулю*:

$$\iint\limits_{(S)} (\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS = 0.$$

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из формулы Гаусса–Остроградского (2.68).

Теперь рассмотрим тело $V \subset \Omega$, которое имеет форму трубки, ограниченной сечениями S_1, S_2 и боковой поверхностью S_3 (рис. 2.15). Итак, $S = S_1 + S_2 + S_3$ — граница трубки V.

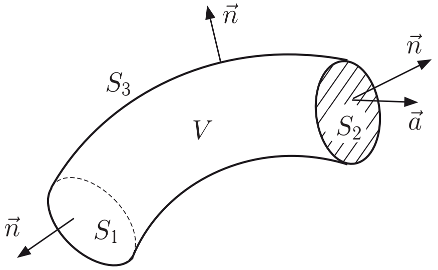

Рис. 2.15

Пусть в области Ω задано *соленоидальное поле* $\vec{a}$, причем в любой точке S_3 вектор $\vec{a}$ является касательным к S_3. Так как поле соленоидальное, то в силу теоремы 2.16.1

$$\iint\limits_{S} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS = \iint\limits_{S_1} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS + \iint\limits_{S_2} (\vec{a}\cdot\vec{n})dS + \iint\limits_{S_3} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS = 0. \quad (2.86)$$

Но поскольку

$$\iint\limits_{S_3} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS = 0,$$

то из (2.86) получаем

$$\iint\limits_{S_1^-} (\vec{a}\cdot\vec{n})dS = \iint\limits_{S_2} (\vec{a}\cdot\vec{n})dS.$$

Таким образом, мы получили замечательное свойство соленоидального поля: *поток соленоидального вектора через поперечные сечения векторной трубки сохраняет постоянную величину*. Ее называют *интенсивностью* векторной трубки.

В поле скоростей текущей жидкости полученный результат означает, что количество жидкости, втекающей в трубку за единицу времени, равно количеству вытекающей из трубки жидкости.

Глава 3

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 3.1. Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды

Пусть

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

— бесконечная числовая последовательность. Формальное выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.1}$$

называется *числовым рядом* или просто *рядом*. Числа a_1, a_2, a_3, … называются *членами данного ряда*, а a_n — *общим членом* ряда.

Определение 3.1.1. Сумма первых n членов ряда (3.1) называется *n-й частичной суммой* данного ряда и обозначается символом S_n. Итак,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда (3.1):

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots\ . \tag{3.2}$$

Определение 3.1.2. Ряд (3.1) называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности (3.2) частичных сумм этого ряда. При этом число

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

называется *суммой* данного ряда и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Ряд (3.1) называется *расходящимся*, если расходится последовательность (3.2) частичных сумм этого ряда, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен.

Примеры числовых рядов.

1°. Докажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{3.3}$$

сходится.

Общий член этого ряда представим в виде

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда для n-й частичной суммы данного ряда получим

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

И, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

то рассматриваемый ряд сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2°. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{3.4}$$

расходится. В самом деле,

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n,$$

и, следовательно,

$$S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1),$$

который стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

3°. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ . \tag{3.5}$$

Этот ряд расходится, поскольку последовательность его частичных сумм

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ \ldots,\ S_{2n-1} = 1,\ S_{2n} = 0,\ \ldots$$

не имеет предела.

4°. Рассмотрим ряд, составленный из элементов геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots\ . \tag{3.6}$$

Вычислим n-ю частичную сумму S_n этого ряда:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}. \tag{3.7}$$

Теперь заметим, что при $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

А это значит, что при $|q| < 1$ рассматриваемый ряд (3.6) сходится и имеет сумму, равную $\dfrac{1}{1-q}$.

Из равенства (3.7) очевидно следует, что при $|q| > 1$ последовательность S_n, а с ней и рассматриваемый ряд (3.6), расходится.

Нетрудно заметить, что при $|q| = 1$ ряд (3.6) также является расходящимся.

§ 3.2. Действия с рядами. Основные свойства

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots \tag{3.8}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots \tag{3.9}$$

— два произвольных числовых ряда.

Рассмотрим следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots, \quad (3.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n) + \ldots, \quad (3.11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n + \ldots, \quad (3.12)$$

где λ — произвольная постоянная.

Ряды (3.10) и (3.11) называются, соответственно, *суммой* и *разностью рядов* (3.8) и (3.9). Ряд (3.12) называется *произведением постоянной* λ *и ряда* (3.8).

Теорема 3.2.1. *Если ряды* (3.8) *и* (3.9) *сходятся и имеют суммы, соответственно равные* A *и* B, *то ряды* (3.10) *и* (3.11) *также сходятся и имеют суммы, соответственно равные* $A + B$ *и* $A - B$, *т. е.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (3.13)$$

Доказательство. Обозначим через A_n, B_n и S_n n-е частичные суммы рядов (3.8), (3.9) и (3.10) соответственно. Тогда, очевидно, что $S_n = A_n + B_n$. Так как по условию теоремы

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B,$$

то, применяя свойство предела суммы, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B.$$

Точно таким же образом доказывается и случай разности рядов.

Теорема доказана. □

Замечание 3.2.1. Обратное утверждение последней теоремы, вообще говоря, не верно. То есть из сходимости ряда (3.10) или (3.11) не следует сходимость каждого из рядов (3.8) и (3.9). Например, ряд

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \ldots \quad (3.14)$$

сходится, поскольку все его члены равны нулю, хотя этот ряд является суммой заведомо расходящихся рядов $\sum\limits_{1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \ldots$ и $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1) = -1 - 1 - \ldots$.

Заметим также, что раскрытие скобок в ряду, вообще говоря, не допустимо. Например, после раскрытия скобок в сходящемся ряду (3.14) получается расходящийся ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots .$$

Теорема 3.2.2. *Пусть ряд* (3.8) *сходится и имеет сумму* S. *Тогда для произвольного числа* λ *ряд* (3.12) *также сходится и его сумма равна* λS, *т. е.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3.15}$$

Доказательство. Если обозначить n-е частичные суммы рядов (3.8) и (3.12) через S_n и S'_n соответственно, то очевидно, что $S'_n = \lambda S_n$. А из этого следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n = \lambda S,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 3.2.1. *Если ряд* (3.8) *расходится, то для произвольного числа* $\lambda \neq 0$ *ряд* (3.12) *также расходится.*

Доказательство. Пусть ряд (3.8) расходится. Если бы ряд (3.12) был сходящимся, то, умножив его на число $\dfrac{1}{\lambda}$, мы бы получили исходный ряд, который должен быть сходящимся согласно последней теореме. Это противоречие и завершает доказательство. □

Замечание 3.2.2. Из теоремы 3.2.2 и следствия 3.2.1 следует, что *умножение членов ряда на число* $\lambda \neq 0$ *не меняет сходимость или расходимость ряда.*

§ 3.3. Остаток ряда. Необходимое условие сходимости ряда

Одной из главных задач теории числовых рядов является установление признаков, по которым можно решить вопрос о сходимости или расходимости данного ряда. Эти признаки называются *критериями сходимости числовых рядов*.

Определение 3.3.1. Ряд

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \tag{3.16}$$

полученный из данного сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ отбрасыванием первых его n членов, называется *n-м остатком сходящегося ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 3.3.1. *Отбрасывание от ряда или присоединение к нему любого конечного числа начальных членов не меняет его сходимость или расходимость. Иначе говоря, ряды*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} + \ldots \tag{3.17}$$

и

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} + \ldots \tag{3.18}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Зафиксируем n и обозначим m-ю частичную сумму ряда (3.18) через S'_m:

$$S'_m = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}.$$

Тогда, очевидно,

$$S'_m = S_{n+m} - S_n, \tag{3.19}$$

где S_{n+m} — $(n+m)$-я частичная сумма ряда (3.17), а S_n — постоянная, поскольку номер n зафиксирован.

Предположим, что ряд (3.17) сходится. Перейдя при $m \to \infty$ к пределу в равенстве (3.19), получим

$$\lim_{m\to\infty} S'_m = \lim_{m\to\infty} S_{n+m} - \lim_{m\to\infty} S_n = S - S_n.$$

А это означает, что ряд (3.18) сходится, причем его сумма S' равна $S - S_n$, где S — сумма ряда (3.17):

$$S' = S - S_n. \tag{3.20}$$

Теперь предположим, что ряд (3.18) сходится и сумма этого ряда равна S', т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} S'_m = S'$. Из равенства (3.19) следует

$$\lim_{m\to\infty} S_{n+m} = \lim_{m\to\infty}(S'_m + S_n) = \lim_{m\to\infty} S'_m + \lim_{m\to\infty} S_n = S' + S_n.$$

А это означает, что ряд (3.17) сходится и его сумма равна $S' + S_n$:

$$S = S' + S_n. \tag{3.21}$$

Случай расходимости точно так же следует из равенства (3.19). Теорема доказана. □

Т е о р е м а 3.3.2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то предел его остатка* r_n *при* $n\to\infty$ *равен нулю*:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Обозначим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Так как $S = S_n + r_n$, то $r_n = S - S_n$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Т е о р е м а 3.3.3 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то предел его общего члена при* $n\to\infty$ *равен нулю, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S. Заметим, что общий член этого ряда можно представить в виде

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Исходя из этого равенства, получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Заметим, однако, что стремление к нулю общего члена ряда является *лишь необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда.*

В качестве примера рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, который, как мы уже доказали выше, является расходящимся, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$.

§ 3.4. Положительные ряды. Теоремы сравнения рядов

В этом параграфе мы будем заниматься вопросом об установлении сходимости или расходимости положительных рядов.

Определение 3.4.1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3.23}$$

называется *положительным*, если все его члены неотрицательны:

$$a_n \geqslant 0$$

для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Заметим, что из этого определения немедленно следует, что *последовательность частичных сумм* $\{S_n\}$ *положительного ряда* (3.23) *является неубывающей*. В самом деле, для любого n имеет место

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n.$$

Из последнего замечания и известной теоремы о том, что *неубывающая и ограниченная сверху последовательность сходится*, вытекает следующий результат.

Теорема 3.4.1. *Если последовательность частичных сумм положительного ряда ограничена сверху, то этот ряд сходится.*

Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают посредством сравнения рассматриваемого ряда с другим рядом, сходимость или расходимость которого известна.

Теорема 3.4.2. *Пусть даны два положительных ряда*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3.24}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots . \tag{3.25}$$

Если для всех номеров n справедливо неравенство

$$a_n \leqslant b_n, \tag{3.26}$$

то

а) *из сходимости ряда* (3.25) *следует сходимость ряда* (3.24),

б) *из расходимости ряда* (3.24) *следует расходимость ряда* (3.25).

Доказательство. Обозначим n-е частичные суммы рядов (3.24) и (3.25) соответственно через A_n и B_n. Из неравенства (3.26) следует, что $A_n \leqslant B_n$ для произвольного n.

Докажем а). Пусть ряд (3.25) сходится. Это значит, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, причем $B_n \leqslant B$, так как члены этого ряда неотрицательны. Следовательно, $A_n \leqslant B_n \leqslant B$ для любого n. Итак, последовательность A_n частичных сумм положительного ряда (3.24) ограничена сверху, значит, этот ряд сходится согласно теореме 3.4.1.

б) Пусть теперь ряд (3.24) расходится. Допустим обратное, пусть ряд (3.25) тоже сходится. Но тогда по а) и ряд (3.24) должен сходиться, что противоречит условию.

Теорема доказана. □

Замечание 3.4.1. Теорема 3.4.2 справедлива и в случае, когда неравенство (3.26) выполняется не для всех номеров, а хотя бы начиная с некоторого номера N: $n \geqslant N$. В самом деле, по теореме 3.3.1 отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

Из последней теоремы вытекает более удобная для применения теорема.

Теорема 3.4.3. *Пусть* (3.24) *и* (3.25) — *положительные ряды, причем $b_n \neq 0$ для всех n. Пусть существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L. \tag{3.27}$$

Тогда

а) *если* $L \neq 0$, *то оба ряда* (3.24) *и* (3.25) *или одновременно сходятся или одновременно расходятся*,

б) *если* $L = 0$, *то из сходимости ряда* (3.25) *следует сходимость ряда* (3.24), *а из расходимости ряда* (3.24) *следует расходимость ряда* (3.25).

Доказательство. а). Пусть $L \neq 0$. По определению предела равенство (3.27) означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$, в частности, для $0 < \varepsilon < L$, существует такой номер N, что при $n \geqslant N$ справедливо

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon.$$

Стало быть, для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство

$$(L-\varepsilon)b_n < a_n < (L+\varepsilon)b_n. \tag{3.28}$$

Теперь рассмотрим разные случаи.

1. Пусть ряд (3.25) сходится. Тогда сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L + \varepsilon)\, b_n$. Учитывая правую часть двойного неравенства (3.28), из теоремы 3.4.2 следует, что тогда сходится и ряд (3.24).

2. Пусть ряд (3.24) сходится. Учитывая левую часть двойного неравенства (3.28), из теоремы 3.4.2 получаем, что тогда сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L-\varepsilon)\, b_n$, а с ним и ряд (3.25).

3. Пусть ряд (3.25) расходится. Тогда расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L-\varepsilon)\, b_n$. Учитывая левую часть двойного неравенства (3.28), из теоремы 3.4.2 получаем, что тогда расходится и ряд (3.24).

4. Пусть ряд (3.24) расходится. Учитывая правую часть двойного неравенства (3.28), из теоремы 3.4.2 получаем, что тогда расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)\, b_n$, а с ним и ряд (3.25).

б). Пусть теперь $L = 0$. Это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при $n \geqslant N$ справедливо

неравенство
$$\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$$
или, что то же самое,
$$a_n < \varepsilon b_n.$$
Тем самым, мы находимся в условиях предыдущей теоремы, что и завершает доказательство утверждения б).

Теорема полностью доказана. □

Теорема 3.4.4. *Пусть* (3.24) *и* (3.25) *положительные ряды. Если* $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ *для всех номеров* n *и справедливо неравенство*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \tag{3.29}$$
то из сходимости ряда (3.25) *следует сходимость ряда* (3.24), *а из расходимости ряда* (3.24) *следует расходимость ряда* (3.25).

Доказательство. Из (3.29) следуют неравенства
$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &\leqslant \frac{b_2}{b_1}, \\ \frac{a_3}{a_2} &\leqslant \frac{b_3}{b_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &\leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}} . \end{aligned}$$
Перемножая почленно все эти неравенства (ряды положительны!), получим
$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1} ,$$
откуда
$$a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1}\, b_n .$$
Поскольку в последнем неравенстве величина $\dfrac{a_1}{b_1}$ — постоянная, не зависящая от n, то для завершения доказательства нам осталось применить теоремы 3.2.2 и 3.4.2. □

Последние три теоремы называются теоремами сравнения или признаками сравнения рядов.

Приведем примеры применения признаков сравнения рядов.

Пример 3.4.1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}.$$

Рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ и применим теорему сравнения 3.4.3. Так как в данном случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2^n - n}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = 1 \neq 0,$$

то, следовательно, рассматриваемый ряд тоже сходится.

Пример 3.4.2. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots \,. \tag{3.30}$$

называется *гармоническим*. Нетрудно заметить, что для этого ряда выполняется необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Тем не менее, докажем, что гармонический ряд расходится. Для этого рассмотрим расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ и заметим, что в данном случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Откуда, по теореме сравнения 3.4.3, следует расходимость гармонического ряда.

§ 3.5. Признак Даламбера

Рассмотрим положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \,. \tag{3.31}$$

Сравнивая данный ряд с заведомо сходящимися или расходящимися рядами, можно получить удобные для практических целей признаки сходимости положительных рядов.

Теорема 3.5.1 (признак Даламбера). *Пусть существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L \quad (a_n\neq 0). \tag{3.32}$$

Тогда,

а) *если* $L<1$, *то ряд* (3.31) *сходится*,

б) *если* $L>1$, *то ряд* (3.31) *расходится*,

в) *если* $L=1$, *то вопрос о сходимости ряда* (3.31) *остается открытым.*

Доказательство. а). Пусть $L<1$. Тогда существует такое число q, что $L<q<1$. В силу (3.32) для произвольного ε, в частности, для $\varepsilon=q-L$, существует такой номер N, что для всех $n>N$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-L\right|<q-L,$$

или

$$-(q-l)<\frac{a_{n+1}}{a_n}-L<q-L.$$

Рассмотрим правую часть получившегося двойного неравенства: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-L<q-L$ или

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q=\frac{q^{n+1}}{q^n}=\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

А поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$, $q<1$, сходится, то следовательно, по теореме 3.4.4, сходится и ряд (3.31).

б). Пусть $L>1$. Это означает, что с некоторого номера N $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1\ \forall\ n>N$. Тогда $a_{n+1}>a_n$ для всех $n>N$ и, следовательно, a_n не может стремиться к нулю. Стало быть, ряд (3.31) расходится в силу необходимого условия сходимости (теорема 3.3.3).

в). Пусть $L=1$. Тогда ряд может сходиться, а может и расходиться. Приведем соответствующие примеры.

1. Гармонический ряд расходится и для него

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$, как мы уже знаем, сходится и для него

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1.$$

Теорема полностью доказана. □

Пример 3.5.1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2}=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера рассматриваемый ряд сходится.

§ 3.6. Признак Коши

Теорема 3.6.1 (признак Коши). *Пусть существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L.$$

Тогда,

а) *если* $L<1$, *то ряд* (3.31) *сходится*,

б) *если* $L>1$, *то ряд* (3.31) *расходится*,

в) *если* $L=1$, *то вопрос о сходимости ряда* (3.31) *остается открытым.*

Доказательство. Докажем утверждение а). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L<1$. Тогда существует такое число q, что $L<q<1$. По определению предела последовательности для произвольного ε, в частности, для $\varepsilon = q - L$, существует такой номер N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство

$$|\sqrt[n]{a_n} - L| < q - L,$$

или

$$-(q - l) < \sqrt[n]{a_n} - L < q - L.$$

Рассмотрим правую часть этого двойного неравенства: $\sqrt[n]{a_n} - L < q - L$ или

$$a_n < q^n.$$

Но поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, $q < 1$, сходится, то по теореме 3.4.2 ряд (3.31) тоже сходится.

б). Пусть $L > 1$. Это означает, что с некоторого номера N $\sqrt[n]{a_n} > 1$, т. е. $a_n > 1$. Следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 3.3.3). Значит, ряд (3.31) расходится.

в). Не трудно заметить, что примеры, приведенные для доказательства утверждения в) признака Даламбера, применимы и для данного случая тоже.

Теорема доказана. □

Замечание 3.6.1. Доказательства утверждений а) признаков Далмбера и Коши были основаны на неравенствах

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$$

и

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$$

соответственно. Нетрудно заметить, что эти неравенства нельзя заменить на неравенства

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

и

$$\sqrt[n]{a_n} < 1$$

соответственно. В самом деле, гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, в то время как $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ и $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1$.

Замечание 3.6.2. Можно доказать, что из существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (Даламбер) вытекает существование $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ (Коши). Из этого следует, что если признак Даламбера дает ответ на вопрос о поведении данного ряда, то признак Коши и подавно его дает.

Обратное утверждение, однако, не верно. Действительно, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+3}{2^n}.$$

Так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(-1)^{n+1}+3}{2\cdot((-1)^n+3)}=\begin{cases}1, & n \text{ — нечетное},\\ \dfrac{1}{4}, & n \text{ — четное},\end{cases}$$

значит, не существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ и, значит, признак Даламбера не применим к данному ряду (не дает ответа на поставленный вопрос).

Теперь вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(-1)^n+3}}{2}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}}{2}=\dfrac{1}{2}, & n \text{ — нечетное},\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{4}}{2}=\dfrac{1}{2}, & n \text{ — четное}.\end{cases}$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}<1.$$

Значит, рассматриваемый ряд сходится.

Тем самым мы показали, что признак Коши сильнее признака Даламбера.

§ 3.7. Интегральный признак Коши

Признаки Даламбера и Коши оказываются непригодными для выяснения вопроса о сходимости некоторых часто встречающихся положительных рядов. Так, например, с помощью этих признаков нельзя выяснить вопрос о сходимости так называемого *обобщенного гармонического ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

где α — любое вещественное число. В самом деле, признак Коши не решает вопрос, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{\alpha}}} = 1.$$

И, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} = 1,$$

то и признак Даламбера не решает вопрос о сходимости этого ряда.

Следующий признак, который отличается по форме от всех предыдущих, позволит нам полностью исследовать вопрос о сходимости обобщенного гармонического ряда.

Теорема 3.7.1 (интегральный признак Коши). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и не возрастает на полупрямой $x \geqslant 1$. Тогда числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{3.33}$$

где $a_n = f(n)$, и несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx \tag{3.34}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ не возрастает, то для любого $x \in [k, k+1]$ справедливо неравенство

$$a_{k+1} = f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k) = a_k,$$

а значит,

$$a_{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leqslant a_k. \tag{3.35}$$

Запишем неравенства 3.35 для значений $k = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$a_2 \leqslant \int_1^2 f(x)\,dx \leqslant a_1,$$

$$a_3 \leqslant \int_2^3 f(x)\,dx \leqslant a_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant a_{n-1}.$$

Складывая почленно полученные неравенства, получим

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

или

$$S_n - a_1 \leqslant \sigma_n \leqslant S_{n-1}, \tag{3.36}$$

где $\sigma_n = \int\limits_1^n f(x)\,dx$, а S_n — n-я частичная сумма ряда (3.33). Так как последовательности S_n и σ_n неубывающие, то для их сходимости достаточна их ограниченность.

Теперь предположим, что несобственный интеграл (3.34) сходится:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \sigma < \infty.$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Применяя левую часть двойного неравенства (3.36), получим $S_n \leqslant a_1 + \sigma_n \leqslant a_1 + \sigma$ для произвольного n. Итак, неубывающая последовательность S_n ограничена сверху, а значит, эта последовательность, а вместе с ней и ряд (3.33), сходится.

Пусть теперь несобственный интеграл (3.34) расходится, т. е. $\sigma_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Но тогда, учитывая правую часть двойного неравенства (3.36), получим $S_{n-1} \to \infty$ при $n \to \infty$. А это означает расходимость ряда (3.33).

Точно такими же рассуждениями доказывается, что из сходимости ряда (3.33) следует сходимость несобственного интеграла (3.34), а из расходимости ряда (3.33) следует расходимость несобственного интеграла (3.34).

Теорема доказана. □

Замечание 3.7.1. Нетрудно убедиться, что интегральный признак Коши остается справедливым, если предположить, что функция $f(x)$ определена на полупрямой $x \geqslant a$.

Пример 3.7.1. Исследуем вопрос о сходимости обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Если $\alpha \leqslant 0$, то этот ряд расходится, поскольку не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

Пусть $\alpha > 0$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ удовлетворяет условиям теоремы Коши 3.7.1. Рассмотрим последовательность

$$\sigma_n = \int\limits_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \ln n & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Заметим, что при $\alpha \leqslant 1$ последовательность σ_n расходится, а при $\alpha > 1$ — сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \dfrac{1}{\alpha - 1}$. А это, согласно интегральному признаку Коши, значит, что обобщенный гармонический ряд расходится при $\alpha \leqslant 1$ и сходится при $\alpha > 1$.

Из последнего примера в частных случаях вытекает, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

расходится.

§ 3.8. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

В предыдущих лекциях мы рассматривали только положительные ряды. Теперь мы перейдем к изучению рядов с произвольными членами: как положительными, так и отрицательными.

О п р е д е л е н и е 3.8.1. Ряд с членами произвольных знаков называется *знакопеременным рядом*.

О п р е д е л е н и е 3.8.2. Ряд называется *знакочередующимся*, если любые его два соседние члена имеют разные знаки.

Знакочередующийся ряд удобно записать в следующей форме:

$$p_1 - p_2 + p_3 - \ldots + (-1)^{n-1} p_n + \ldots , \tag{3.37}$$

где все $p_n > 0$.

Т е о р е м а 3.8.1 (признак Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда* (3.37) *не возрастают по абсолютной величине*:

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant \ldots ,$$

и стремятся к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0,$$

то этот ряд сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через S_n частичную сумму n-го порядка ряда (3.37) и рассмотрим частичную сумму четного порядка S_{2n}:

$$S_{2n} = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \ldots + (p_{2n-1} - p_{2n}).$$

По условию теоремы очевидно, что каждая скобка в последнем представлении неотрицательна. Стало быть, последовательность S_{2n} не убывает.

С другой стороны, S_{2n} можно переписать в виде

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n},$$

где, опять же, каждая скобка неотрицательна и, следовательно,

$$S_{2n} \leqslant p_1. \tag{3.38}$$

Итак, последовательность S_{2n} не убывает и ограничена сверху. Значит, эта последовательность сходится к некоторому конечному числу S:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Из очевидного равенства

$$S_{2n-1} = S_{2n} + p_{2n}$$

и условия нашей теоремы следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + p_{2n}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} p_{2n} = S.$$

Таким образом, последовательность S_n, независимо от четности или не четности n, а вместе с ней и ряд (3.37), сходится к S, т. е. знакочередующийся ряд (3.37) является сходящимся.

Теорема доказана. □

Замечание 3.8.1. При доказательстве последней теоремы мы обнаружили, что последовательность частичных сумм четного порядка S_{2n} стремится к пределу S не убывая и для ее общего члена справедливо неравенство (3.38). Перейдя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, получим

$$S \leqslant p_1. \tag{3.39}$$

Это неравенство дает весьма простую и удобную оценку для остатка рассматриваемого ряда, который и сам представляет собою такой же знакочередующийся ряд. В самом деле, рассмотрим n-й остаток r_n знакочередующегося ряда (3.37), который запишем в виде

$$r_n = (-1)^n(p_{n+1} - p_{n+2} + p_{n+3} - \ldots).$$

Откуда, в силу (3.39), следует оценка

$$|r_n| \leqslant |p_{n+1}|. \tag{3.40}$$

Итак, мы пришли к следующему заключению: *если вместо суммы знакочередующегося ряда* (3.37) *взять сумму первых его n членов, то полученная ошибка по модулю не превзойдет абсолютной величины первого отброшенного члена этого ряда.*

Определение 3.8.3. Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 3.8.1, называют *рядом Лейбница* или *рядом лейбницевского типа.*

Таким образом, теорема 3.8.1 утверждает, что *ряд Лейбница сходится*.

Пример 3.8.1. Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \ . \tag{3.41}$$

Заметим, что это — ряд лейбницевского типа, а поэтому он сходится (см. теорему 3.8.1).

§ 3.9. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3.42}$$

— знакопеременный ряд. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \ . \tag{3.43}$$

Определение 3.9.1. Ряд (3.42) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (3.43).

Пример 3.9.1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

сходится абсолютно, поскольку сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Замечание 3.9.1. Так как ряд (3.43) является положительным, то все признаки сходимости положительных рядов можно применить для выяснения абсолютной сходимости ряда (3.42). Например, применяя признак Даламбера, получим, что *знакопеременный ряд* (3.42) *сходится абсолютно*, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 3.9.1 (Коши). *Из сходимости ряда* (3.43) *следует сходимость ряда* (3.42) *или из абсолютной сходимости ряда вытекает его обычная сходимость.*

Доказательство. Пусть ряд (3.43) сходится. Рассмотрим очевидное двойное неравенство

$$-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|.$$

Отсюда

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|.$$

Из последнего неравенства по признаку сравнения рядов (см. теорему 3.4.2) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ сходится. Но

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

Стало быть, ряд (3.42) сходится как разность двух сходящихся рядов.

Теорема доказана. □

Замечание 3.9.2. Обратное утверждение теоремы 3.9.1 не верно, т. е. из сходимости ряда (3.42), вообще говоря, не следует сходимость ряда (3.43). В самом деле, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, как было показано в примере 3.8.1, сходится, в то время как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, будучи гармоническим рядом, расходится.

Определение 3.9.2. Ряд (3.42) называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд (3.43) расходится.

Пример 3.9.2. Как было замечено выше, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

является примером условно сходящегося ряда.

§ 3.10. Переместительное свойство абсолютно сходящегося ряда. Теорема Дирихле

Пусть дан сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \ , \tag{3.44}$$

сумма которого равна S. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n + \ldots \ , \tag{3.45}$$

который получается из ряда (3.44) произвольной перестановкой его членов.

Возникает естественный вопрос, сходится ли ряд (3.45) и, если да, то будет ли его сумма равна сумме исходного ряда (3.44). В общем случае этот вопрос имеет отрицательное решение (см. далее теорему 3.11.1). Однако для абсолютно сходящихся рядов справедлива

Теорема 3.10.1 (Дирихле). *Если ряд* (3.44) *сходится абсолютно, то ряд* (3.45), *полученный из него перестановкой членов*, *также сходится и имеет ту же сумму*, *что и исходный ряд*.

Доказательство. Разобьем доказательство на два случая.

Случай 1. Пусть ряд (3.44) положительный. Рассмотрим частичную сумму

$$S'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k$$

ряда (3.45). Поскольку

$$a'_1 = a_{n_1}, a'_2 = a_{n_2}, \ldots \ , a'_k = a_{n_k},$$

то, обозначив $n = \max\{n_1, n_2, \ldots \ , n_k\}$, мы очевидно будем иметь

$$S'_k \leqslant S_n,$$

где S_n — n-я частичная сумма ряда (3.44). А из этого неравенства следует, что ряд (3.45) будет сходящимся и его сумма S' не превзойдет суммы S ряда (3.44):

$$S' \leqslant S.$$

Но, поскольку ряд (3.44), в свою очередь, получается из ряда (3.45) перестановкой его членов, то точно такими же рассуждениями получим
$$S \leqslant S'.$$
А значит,
$$S = S'.$$

Случай 2. Пусть теперь (3.44) — произвольный абсолютно сходящийся ряд. Рассмотрим ряды
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(+) \tag{3.46}$$
и
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-), \tag{3.47}$$
где
$$a_n(+) = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n > 0, \\ 0, & \text{если } a_n \leqslant 0, \end{cases} \tag{3.48}$$
$$a_n(-) = \begin{cases} -a_n, & \text{если } a_n < 0, \\ 0, & \text{если } a_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.49}$$
Ряды (3.46) и (3.47) положительные и очевидно, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(+) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-). \tag{3.50}$$

Так как ряд (3.44) сходится абсолютно, то, значит, сходятся и ряды (3.46) и (3.47), суммы которых обозначим через $S(+)$ и $S(-)$. В силу (3.50) имеем
$$S = S(+) - S(-),$$
где S — сумма ряда (3.44).

Теперь, по аналогии с (3.50), ряд (3.45) представим в виде
$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(+) - \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(-), \tag{3.51}$$
где $a'_n(+)$ и $a'_n(-)$ определяются по принципу (3.48) и (3.49).

С другой стороны, положительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n(+)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n(-)$ получаются из соответствующих рядов (3.46) и (3.47) перестановкой членов. Следовательно, как уже было доказано выше (случай 1), ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n(+)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n(-)$ сходятся и имеют те же суммы $S(+)$ и $S(-)$. А это, в силу (3.51), значит, что ряд (3.45) также сходится и его сумма равна

$$S' = S(+) - S(-) = S.$$

Теорема полностью доказана. □

Замечание 3.10.1. Свойство абсолютно сходящегося ряда, сформулированное в теореме Дирихле 3.10.1, часто называют *переместительным свойством*.

§ 3.11. О перестановке членов условно сходящегося ряда. Теорема Римана

Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots \tag{3.52}$$

(см. пример 3.9.2). Сумму ряда (3.52) обозначим S.

Теперь переставим члены последнего ряда так, чтобы после одного положительного члена следовали два отрицательных члена. В результате такой перестановки членов получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \ldots\ . \tag{3.53}$$

Сумму последнего ряда обозначим S' и докажем, что

$$S' = \frac{1}{2}\,S$$

или что сумма ряда (3.53), полученного в результате указанной перестановки членов ряда (3.52), вдвое меньше суммы исходного ряда.

В самом деле, если частичные суммы рядов (3.52) и (3.53) обозначим через S_n и S'_n соответственно, то

$$S'_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}.$$

Откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S'_{3n} = \frac{1}{2} S. \tag{3.54}$$

Далее, очевидно, что

$$S'_{3n-1} = \frac{1}{2} S_{2n} + \frac{1}{4n}, \tag{3.55}$$

$$S'_{3n-2} = S'_{3n-1} + \frac{1}{4n-2}. \tag{3.56}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S'_{3n-1} = \frac{1}{2} S, \qquad \lim_{n\to\infty} S'_{3n-2} = \frac{1}{2} S. \tag{3.57}$$

Тем самым окончательно доказано равенство $S' = \frac{1}{2} S$.

Итак, рассмотренный нами пример показывает, что условно сходящийся ряд не обладает переместительным свойством. Более того, справедлива следующая интересная теорема Римана, которая вносит полную ясность в вопрос о влиянии перестановок членов условно сходящегося ряда на его сумму.

Теорема 3.11.1 (Риман). *Если ряд сходится условно, то, каково бы ни было наперед заданное число L, конечное или равное $\pm\infty$, можно так переместить члены этого ряда, чтобы полученный ряд имел своей суммой именно L.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{3.58}$$

— произвольный условно сходящийся ряд.

Заметим, что условно сходящийся ряд (3.58) содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов. В самом деле, если бы членов одного знака было конечное число, то, отбросив не влияющее на сходимость конечное число первых членов, мы бы получили ряд, состоящий из членов одного знака, для которого сходимость равносильна абсолютной сходимости. Следовательно, мы можем рассматривать следующие ряды с положительными членами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \tag{3.59}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k\ , \tag{3.60}$$

где p_k — положительные члены, а q_k — модули отрицательных членов ряда (3.58), выписанные в таком порядке, в каком они стоят в этом ряде. Через S_n обозначим n-ю частичную сумму ряда (3.58), а через P_n и Q_n — сумму всех тех членов рядов (3.59) и (3.60), соответственно, которые входят в S_n. Тогда очевидно, что

$$S_n = P_n - Q_n$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (P_n - Q_n) = S, \tag{3.61}$$

где S — сумма ряда (3.58). С другой стороны, так как ряд (3.58) не сходится абсолютно, то

$$\lim_{n\to\infty} (P_n + Q_n) = \infty. \tag{3.62}$$

Из (3.61) и (3.62) немедленно следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = \infty. \tag{3.63}$$

Теперь мы готовы построить ряд, который сходится к числу L, переставляя члены исходного ряда (3.58).

Предположим, что L — конечное число. Сначала из ряда (3.58) выберем ровно столько положительных членов $p_1, p_2, \dots, p_{k_1}$, чтобы их сумма была больше L (это возможно в силу (3.63)). Затем добавим к выбранным членам ровно столько отрицательных членов $-q_1, -q_2, \dots, -q_{k_2}$, чтобы общая сумма оказалась меньше L (это возможно в силу (3.63)). Затем снова добавим ровно столько положительных членов $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \dots, p_{k_3}$, чтобы общая сумма была больше L. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечный ряд, куда войдут все члены исходного ряда (3.58). Остается доказать, что полученный ряд сходится к L. В самом деле, заметим, что, согласно построению, отклонение частичной суммы полученного ряда от числа L в ту или другую сторону не превосходит по абсолютной величине последнего написанного члена. Но, так как $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, то это значит, что полученный ряд сходится к L.

Теперь предположим, что $L = +\infty$. Тогда вышеизложенный процесс можно будет подчинить требованию, чтобы суммы последовательно становились больше 1, 2, 3 и т. д., а из отрицательных членов помещать лишь по одному после каждой группы положительных. Таким путем, очевидно, получится ряд, имеющий сумму $+\infty$. Аналогично можно получить и ряд с суммой $-\infty$.

Теорема Римана доказана. $\square$

Глава 4

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 4.1. Функциональные последовательности. Сходимость и равномерная сходимость

Если каждому натуральному числу n поставлена в соответствие некоторая функция $f_n(x)$, заданная на множестве D, то говорят, что задана *функциональная последовательность*

$$f_1(x), f_2(x), \dots , f_n(x), \dots \tag{4.1}$$

или, короче, $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Множество D называется *областью определения* функциональной последовательности (4.1).

Пусть x_0 — произвольная фиксированная точка области определения последовательности (4.1). Рассмотрим числовую последовательность

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots , f_n(x_0), \dots \ . \tag{4.2}$$

Определение 4.1.1. Говорят, что функциональная последовательность (4.1) *сходится в точке* x_0, если сходится соответствующая числовая последовательность (4.2).

Множество всех точек x_0, в которых сходится функциональная последовательность (4.1), называется *областью сходимости* этой последовательности.

В различных конкретных случаях область сходимости функциональной последовательности может совпадать с областью определения, либо составлять часть области определения, либо вообще являться пустым множеством.

Предположим, что функциональная последовательность (4.1) имеет в качестве области сходимости множество $\{x\}$.

Определение 4.1.2. Говорят, что последовательность $f_n(x)$ *сходится* (*поточечно*) к функции $f(x)$, которая определена на множестве D, и обозначают

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

если для произвольного $x_0 \in D$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

или, что то же самое, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(x_0, \varepsilon)$, зависящий как от ε, так и от точки x_0, что для всех $n > N(x_0, \varepsilon)$ справедливо неравенство

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В этом случае $f(x)$ называется *пределом функциональной последовательности* (4.1) или ее *предельной функцией*.

Пример 4.1.1. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = x^n,$$

$n = 1, 2, 3\ldots$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 4.1). Нетрудно заметить, что при $0 \leqslant x < 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

а при $x = 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1.$$

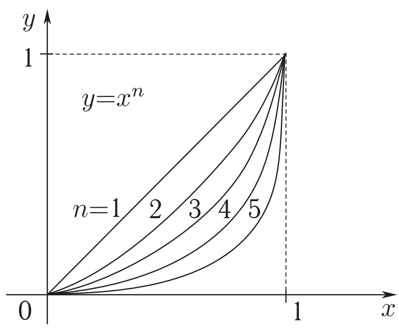

Рис. 4.1

Итак, функциональная последовательность $f_n(x) = x^n$ сходится к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{при} \quad x = 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Определение 4.1.3. Говорят, что последовательность $f_n(x)$ *равномерно сходится* к функции $f(x)$, которая определена на множестве D, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, зависящий от ε, что при $n > N(\varepsilon)$ и для всех x из множества D справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Замечание 4.1.1. Это определение отличается от определения 4.1.2 тем, что для любого $\varepsilon > 0$ удается найти такой универсальный номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого неравенство (4.4) выполняется сразу для всех x из множества D.

Замечание 4.1.2. Из сходимости последовательности (4.1) вовсе не следует ее равномерная сходимость. Так, функциональная последовательность $f_n(x) = x^n$, рассмотренная в примере 4.1.1, сходится на всем сегменте $[0, 1]$ к функции (4.3). Однако эта сходимость не является равномерной, поскольку неравенство

$$|f_n(x) - f(x_0)| = |x^n| = x^n < \varepsilon,$$

где $\varepsilon < 1$, не может выполняться одновременно для всех $0 \leqslant x < 1$, так как $x^n \to 1$ при фиксированном n, когда $x \to 1$.

Теперь приведем пример функциональной последовательности, равномерно сходящейся на некотором множестве D.

Пример 4.1.2. Рассмотрим все ту же последовательность $f_n(x) = x^n$ из примера 4.1.1, но не на всем отрезке $[0, 1]$, а на отрезке $[0, a]$, где a — фиксированное число, $0 < a < 1$. Теперь заметим, что на указанном отрезке последовательность $f_n(x) = x^n$ равномерно сходится к функции $f(x) = 0$. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$

$$a^n < \varepsilon.$$

Найденный номер $N(\varepsilon)$ является универсальным в том смысле, что для любого $x \in [0, a]$ справедливо неравенство

$$x^n < a^n < \varepsilon.$$

А это означает равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = x^n$ на отрезке $[0, a]$, $0 < a < 1$.

§ 4.2. Функциональные ряды. Сходимость и равномерная сходимость

Пусть
$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$
— функции, определенные на некотором множестве D. Формальная бесконечная сумма
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{4.5}$$
называется *функциональным рядом*; множество D при этом называется *областью определения* функционального ряда (4.5).

Пусть x_0 — произвольная фиксированная точка области определения ряда (4.5). Рассмотрим числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots . \tag{4.6}$$

Определение 4.2.1. Говорят, что функциональный ряд (4.5) *сходится в точке* x_0, если сходится соответствующий числовой ряд (4.6).

Определение 4.2.2. Множество всех точек x, в которых сходится функциональный ряд (4.5), называется *областью сходимости* этого ряда.

Предположим, что функциональный ряд (4.5) имеет в качестве области сходимости множество $\{x\}$.

Определение 4.2.3. Функция $S(x)$, определенная на множестве $\{x\}$, называется *суммой ряда* (4.5), если в произвольной точке $x_0 \in \{x\}$ этот ряд сходится к $S(x_0)$. В этом случае пишут
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Пример 4.2.1. Рассмотрим прогрессию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Область сходимости этого ряда есть интервал $(-1, 1)$, а его суммой является функция $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Понятие сходимости и суммы функционального ряда можно было определить и другим образом. Для этого рассмотрим сумму первых n членов ряда (4.5), которая называется n-й частичной суммой этого ряда:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ \dots \ + u_n(x).$$

Тем самым получим функциональную последовательность частичных сумм ряда:

$$S_1(x), S_2(x), \dots , S_n(x), \dots \ . \tag{4.7}$$

Теперь нетрудно заметить, что понятия сходимости и суммы функционального ряда (4.5) можно было определить следующим образом.

Определение 4.2.4. Функциональный ряд (4.5) называется *сходящимся на множестве* $\{x\}$, если на этом множестве сходится последовательность его частичных сумм $S_n(x)$.

Предел последовательности частичных сумм

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

называется *суммой ряда* (4.5).

Определение 4.2.5. Ряд (4.5) называется *равномерно сходящимся* к функции $S(x)$ на множестве $\{x\}$, если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на этом множестве, т. е. если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, зависящий от ε, что при $n > N(\varepsilon)$ и для всех x из множества D справедливо неравенство

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon. \tag{4.8}$$

Замечание 4.2.1. Так как $S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, то неравенство (4.8) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Замечание 4.2.2. Из определения 4.2.5 непосредственно следует, что *если ряд* (4.5) *равномерно сходится к функции* $S(x)$ *на некотором множестве* $\{x\}$, *то ряд* (4.5) *равномерно сходится к функции* $S(x)$ *и на любой части множества* $\{x\}$.

Пример 4.2.2. Ряд

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots$$

сходится на отрезке $[0, 1]$, но не равномерно. В самом деле, n-я его частичная сумма равна $S_n(x) = x^n$. А эта последовательность сходится на отрезке $[0, 1]$ (см. пример 4.1.1), однако эта сходимость не является равномерной (см. замечание 4.1.2).

§ 4.3. Достаточный признак Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда

Наиболее простым и широко используемым признаком равномерной сходимости является *мажорантный признак Вейерштрасса*, основанный на сравнении функционального ряда с числовым рядом, члены которого неотрицательны.

Определение 4.3.1. Положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots\ , \tag{4.10}$$

называется *мажорирующим*, или *мажорантным*, для функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ \ldots\ + u_n(x) + \ \ldots \tag{4.11}$$

на множестве D, если для произвольного $x \in D$

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \tag{4.12}$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 4.3.1 (признак Вейерштрасса). *Если для функционального ряда* (4.11) *существует сходящийся мажорирующий на множестве D числовой ряд* (4.10), *то ряд* (4.11) *на множестве D сходится равномерно.*

Доказательство. Пусть дано какое угодно $\varepsilon > 0$. В силу сходимости мажорантного ряда (4.10)

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0.$$

А это значит, что существует такое число N, что для всех $n > N$ имеет место

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

Тогда при всех таких же n в силу соотношений (4.12) будут выполняться неравенства

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

сразу для всех $x \in D$, что и означает равномерную сходимость ряда (4.11) (см. замечание 4.2.1).

Теорема доказана. □

Замечание 4.3.1. Из условия теоремы 4.3.1 следует также, что для произвольного $x \in D$ ряд (4.11) сходится абсолютно. В самом деле, это непосредственно следует из соотношений (4.12) и теоремы сравнения 3.4.2.

Пример 4.3.1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

сходится равномерно на всей оси x, $-\infty < x < +\infty$, так как сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ для него является мажорирующим:

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

для произвольного $-\infty < x < +\infty$.

§ 4.4. Непрерывность суммы функционального ряда

Мы переходим к изучению вопроса о непрерывности суммы функционального ряда, составленного из непрерывных функций. Как известно, сумма конечного числа непрерывных функций — непрерывна. Возникает естественный вопрос, справедливо ли подобное же утверждение для случая бесконечного числа слагаемых? Следующий простой пример показывает, что это не всегда так.

П р и м е р 4.4.1. Как мы уже знаем (см. примеры 4.1.1 и 4.2.2), ряд
$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots$$
сходится на отрезке $[0, 1]$, но не равномерно, и его сумма равна
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{при} \quad x = 1. \end{cases}$$
Все члены этого ряда — непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции, а его сумма терпит разрыв в точке $x = 1$.

Однако справедлива

Т е о р е м а 4.4.1. *Если все члены функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *и ряд сходится равномерно на* $[a, b]$, *то его сумма* $S(x)$ *также непрерывна на* $[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0 \in [a, b]$ — произвольная точка. Мы должны доказать, что $S(x)$ непрерывна в точке x_0.

Зададимся теперь произвольным $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости ряда можно фиксировать такой номер N, что для всех $n > N$ и для любого $x \in [a, b]$ выполняется неравенство
$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.13}$$
В частности,
$$|S(x) - S_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.14}$$
и
$$|S(x_0) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\ , \tag{4.15}$$
где $n_0 > N$ — произвольный фиксированный номер.

Поскольку $S_{n_0}(x)$ — непрерывная функция как сумма конечного числа непрерывных функций, то для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство
$$|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\ . \tag{4.16}$$

Но тогда, в силу (4.14), (4.15) и (4.16), получим

$$|S(x)-S(x_0)| =$$
$$= |(S(x)-S_{n_0}(x)) + (S_{n_0}(x)-S_{n_0}(x_0)) + (S_{n_0}(x_0)-S(x_0))| \leqslant$$
$$\leqslant |S(x)-S_{n_0}(x)| + |S_{n_0}(x)-S_{n_0}(x_0)| + |S_{n_0}(x_0)-S(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (4.17)$$

для всех $x \in [a,b]$, $|x-x_0| < \delta$. А это означает непрерывность функции $S(x)$ в точке $x_0 \in [a,b]$.

Теорема доказана. □

Замечание 4.4.1. В последней теореме равномерная сходимость является лишь достаточным условием для непрерывности суммы ряда, т. е. существуют функциональные ряды, которые сходятся неравномерно и имеют непрерывную сумму.

Замечание 4.4.2. Из последней теоремы следует, что если члены сходящегося функционального ряда непрерывны, а его сумма — разрывная функция, то сходимость этого ряда неравномерная.

Пример 4.4.2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\operatorname{arctg} nx - \operatorname{arctg}(n-1)x]$, составленный из непрерывных на всей числовой прямой функций $u_n(x) = \operatorname{arctg} nx - \operatorname{arctg}(n-1)x$. Вычислим частичную сумму $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \operatorname{arctg} x + [\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x] + [\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} 2x] + \ldots$$
$$\ldots + [\operatorname{arctg} nx - \operatorname{arctg}(n-1)x] = \operatorname{arctg} nx.$$

Суммой $S(x)$ рассматриваемого ряда будет

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad x>0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad x<0. \end{cases}$$

Поскольку сумма $S(x)$ есть разрывная функция, значит, рассматриваемый ряд сходится к своей сумме $S(x)$ не равномерно в силу замечания 4.4.2.

§ 4.5. Почленное интегрирование функциональных рядов

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса об интегрировании суммы сходящегося функционального ряда.

Теорема 4.5.1. *Пусть дан функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{4.18}$$

Если

1) *все члены* $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *ряда* (4.18) *— непрерывные функции на отрезке* $[a, b]$ *и*

2) *ряд* (4.18) *сходится равномерно на отрезке* $[a, b]$,

то сумма $S(x)$ *данного ряда интегрируема на отрезке* $[a, b]$ *и этот интеграл может быть получен путем почленного интегрирования ряда* (4.18), *т. е.*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx. \tag{4.19}$$

Доказательство. По теореме 4.4.1 сумма $S(x)$ ряда (4.18) непрерывна, а следовательно, интегрируема, на отрезке $[a, b]$. В силу непрерывности все функции $u_n(x)$ также интегрируемы на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим n-ю частичную сумму $S_n(x)$ ряда (4.18):

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x).$$

Согласно свойству адитивности интеграла

$$\int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Для установления формулы (4.19) мы должны доказать, что

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx. \tag{4.20}$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как ряд (4.18) сходится равномерно к своей сумме $S(x)$, то существует такой номер N,

зависящий только от $\varepsilon > 0$, что для всех $n > N$ и $x \in [a, b]$ выполняется
$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Теперь оценим
$$\left|\int_a^b S(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (S(x) - S_n(x))\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |S(x) - S_n(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$
что и доказывает предельное соотношение (4.20).

Теорема доказана. □

§ 4.6. Почленное дифференцирование функциональных рядов

Теорема 4.5.1 позволяет нам доказать следующую теорему.

Теорема 4.6.1. *Если*

1) *функциональный ряд* (4.18) *сходится на отрезке* $[a, b]$,
2) *все члены* $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *ряда* (4.18) *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a, b]$ *и*
3) *ряд*
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots \qquad (4.21)$$
сходится равномерно на отрезке $[a, b]$,

то сумма $S(x)$ *ряда* (4.18) *дифференцируема на отрезке* $[a, b]$, *причем* $S'(x)$ *может быть получен путем почленного дифференцирования ряда, т. е.*
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \qquad (4.22)$$

Доказательство. Сумму ряда (4.21) обозначим $S^*(x)$:
$$S^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \qquad (4.23)$$

По условию 3 теоремы $S^*(x)$ — непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Воспользовавшись теоремой 4.5.1, проинтегрируем ряд (4.23) почленно на отрезке $[a,x]$, где $x \in [a,b]$ — произвольное фиксированное значение. Получим

$$\int\limits_a^x S^*(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n'(t)\,dt.$$

Но, очевидно, $\int\limits_a^x u_n'(t)\,dt = u_n(x) - u_n(a)$, так что

$$\int\limits_a^x S^*(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a).$$

Так как интеграл слева, ввиду непрерывности подынтегральной функции, имеет производную, равную $S^*(x)$, то продифференцировав последнее равенство, получим $S^*(x) = S'(x)$, что и требовалось доказать. $\square$

Глава 5

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 5.1. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости

Определение 5.1.1. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \tag{5.1}$$

где a_n — постоянные числа, называется *степенным рядом*; числа $a_1, a_2, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда*.

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{5.2}$$

называется *обобщенным степенным рядом*.

Заметим, что ряд (5.2) сводится к ряду (5.1) простой заменой переменной $x - x_0 = t$. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением рядов вида (5.1).

Прежде всего выясним, какой может быть область сходимости степенного ряда. В отличие от области сходимости произвольных функциональных рядов, которая может оказаться множеством точек произвольной структуры, в частности, может оказаться пустым, область сходимости степенного ряда не пуста, поскольку в точке $x = 0$ степенной ряд (5.1) всегда сходится и имеет достаточно простую структуру. Точнее, справедлива

Теорема 5.1.1 (Абель). *Если степенной ряд* (5.1) *сходится в точке* $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, *то он сходится*, *притом абсолютно*, *для всех* x, *удовлетворяющих неравенству* $|x| < |x_0|$.

Если степенной ряд (5.1) *расходится в точке* $x = x_0$, *то он расходится для всех* x, *удовлетворяющих неравенству* $|x| > |x_0|$.

Доказательство. Пусть степенной ряд (5.1) сходится в точке $x = x_0$, т. е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$. В силу необходимого условия сходимости общий член $a_n x_0^n$ этого ряда стремится к нулю, а следовательно, ограничен:

$$|a_n x_0^n| \leqslant M \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.3}$$

где $M > 0$ — действительное число.

Возьмем теперь любое x, для которого $|x| < |x_0|$ и рассмотрим ряд

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|. \tag{5.4}$$

Так как

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M \cdot q^n,$$

где $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$. Но поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \cdot q^n$, $0 < q < 1$, сходится, то по признаку сравнения рядов сходится и ряд (5.4), а это, по определению, значит, что ряд (5.1) сходится абсолютно.

Предположим теперь, что степенной ряд (5.1) расходится в точке $x = x_0$, однако сходится в точке x, для которой $|x| > |x_0|$. Тогда по уже доказанной первой части теоремы ряд (5.1) должен сходиться в точке $x = x_0$. Полученное противоречие завершает доказательство и второй части теоремы.

Теорема полностью доказана. □

Последняя теорема позволяет выяснить вопрос о том, что представляет собой область сходимости степенного ряда.

Прежде всего заметим, что существуют степенные ряды, сходящиеся только в точке $x = 0$, например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$. Действительно, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, |x|^{n+1}}{n!\, |x|^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty$$

для произвольного $x \neq 0$, то по признаку Даламбера рассматриваемый ряд расходится для всех $x \neq 0$.

Заметим также, что существуют степенные ряды, которые сходятся на всей оси x, например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. В самом деле, для произвольного x имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,|x|^{n+1}}{(n+1)!\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Откуда по признаку Даламбера следует, что рассматриваемый ряд сходится в любой точке x действительной оси.

В случае, когда область сходимости степенного ряда не совпадает со всей осью $-\infty < x < +\infty$ и не вырождается в точку $x = 0$, справедлива следующая

Теорема 5.1.2. *Если область сходимости степенного ряда* (5.1) *не совпадает со всей осью* $-\infty < x < +\infty$ *и не вырождается в точку* $x = 0$, *то существует такое число* R, $0 < R < +\infty$, *что*

1) *степенной ряд* (5.1) *сходится абсолютно для всех* $|x| < R$ *и*

2) *степенной ряд* (5.1) *расходится для всех* $|x| > R$.

Число R *называется радиусом, а* $(-R, R)$ *— интервалом сходимости степенного ряда* (5.1).

Доказательство. Множество всех точек сходимости ряда (5.1) обозначим через D. По предположению теоремы это множество ограничено, а стало быть, множество $\{|x|\}$ ограничено сверху и, значит, имеет точную верхнюю грань. Обозначим $R = \sup\{|x|\}$. В силу определения числа R при $x > R$ ряд (5.1) расходится. Теперь докажем, что при $x < R$ ряд (5.1) сходится абсолютно. Пусть $x < R$. По определению точной верхней грани существует такая точка сходимости x_0, что $|x| < |x_0| < R$. Но тогда, в силу теоремы 5.1.1, в точке $x < R$ ряд будет сходиться абсолютно.

Теорема доказана. □

Теперь укажем некоторые способы вычисления радиуса сходимости степенного ряда (5.1).

Теорема 5.1.3. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l, \quad 0 \leqslant l < +\infty\ , \tag{5.5}$$

то радиус сходимости R степенного ряда (5.1) *равен* $\frac{1}{l}$:

$$R = \frac{1}{l}, \tag{5.6}$$

при этом полагают $R = +\infty$ при $l = 0$ и $R = 0$ при $l = +\infty$.

Доказательство. К ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n$ применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot l.$$

Если $l = 0$, то $|x| \cdot l = 0$ и степенной ряд (5.1) сходится абсолютно при любых значениях x, т. е. $R = +\infty$.

Если $l = +\infty$ и $x \neq 0$, то $|x| \cdot l = +\infty$ и ряд (5.1) расходится при любых $x \neq 0$, т. е. $R = 0$.

Если $0 < l < +\infty$, то при $|x| \cdot l < 1$, т. е. при $|x| < \frac{1}{l}$ ряд (5.1) сходится абсолютно, а при $|x| \cdot l > 1$, т. е. при $|x| > \frac{1}{l}$ ряд (5.1) расходится. А это значит, что $R = \frac{1}{l}$.

Теорема доказана. □

Теорема 5.1.4. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l, \quad 0 \leqslant l < +\infty\ , \tag{5.7}$$

то радиус сходимости R степенного ряда (5.1) *равен* $\frac{1}{l}$:

$$R = \frac{1}{l}, \tag{5.8}$$

при этом полагают $R = +\infty$ при $l = 0$ и $R = 0$ при $l = +\infty$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы, только вместо признака Даламбера следует применить признак Коши.

Замечание 5.1.1. Теорема 5.1.2 не дает ответа на вопрос о поведении ряда (5.1) в концах интервала сходимости $(-R, R)$. Выясняется, что в концах интервала сходимости степенные ряды могут вести себя различным образом. Приведем соответствующие примеры.

1°. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ имеет интервал сходимости $(-1, 1)$. Очевидно, что в концах этого интервала ряд расходится.

2°. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ имеет интервал сходимости $(-1, 1)$. Этот ряд сходится в точке $x = -1$, превращаясь в этой точке в ряд Лейбница, и расходится в точке $x = 1$, превращаясь в этой точке в гармонический ряд.

3°. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ имеет интервал сходимости $(-1, 1)$. Этот ряд сходится абсолютно в концах этого отрезка, ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

§ 5.2. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда

В предыдущем параграфе было установлено, что степенной ряд (5.1) сходится абсолютно во всех точках его интервала сходимости (см. теорему 5.1.1). Выясним теперь, как обстоит дело с равномерной сходимостью.

Теорема 5.2.1. *Пусть степенной ряд* (5.1) *имеет радиус сходимости* $R > 0$. *Тогда для произвольного числа* r, $0 < r < R$, *степенной ряд* (5.1) *сходится равномерно на отрезке* $[-r, r]$.

Доказательство. Пусть r, $0 < r < R$, — произвольное число. В силу теоремы 5.1.2 ряд (5.1) абсолютно сходится в точке $x = r$, т. е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Теперь заметим, что для всех $|x| \leqslant r$

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n.$$

А это значит, что положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ является мажорантным для ряда (5.1) на отрезке $[-r, r]$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, ряд (5.1) на отрезке $[-r, r]$ сходится равномерно.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 5.2.1. Хотя число r может быть взято сколь угодно близко к R, но на всем интервале сходимости $(-R, R)$ ряд (5.1) все же может не быть равномерно сходящимся. Например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ на своем интервале сходимости $(-1, 1)$ сходится неравномерно, так как его n-я частичная сумма $S_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x}$ при фиксированном n стремится к бесконечности, когда $x \to 1$, и, следовательно, не может оказаться меньше конечного $\varepsilon > 0$ сразу при всех $x \in (-1, 1)$.

Из последней теоремы вытекает следующая *теорема о непрерывности суммы степенного ряда*.

Теорема 5.2.2. *Сумма $S(x)$ степенного ряда* (5.1) *непрерывна в каждой внутренней точке его интервала сходимости.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$ — произвольная внутренняя точка. Очевидно, что существует такое число r, $0 < r < R$, что $|x_0| \leqslant r$ или $x_0 \in [-r, r]$. Согласно предыдущей теореме ряд (5.1) сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$, а следовательно, его сумма $S(x)$ непрерывна на отрезке $[-r, r]$ (см. теорему 4.4.1). В частности, $S(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \in [-r, r]$, что и требовалось доказать. □

§ 5.3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Справедлива следующая *теорема о почленном интегрировании степенного ряда*.

Теорема 5.3.1. *Сумма $S(x)$ степенного ряда* (5.1) *интегрируема на отрезке $[0, x]$, где $|x| < R$, а R — радиус сходимости ряда* (5.1), *причем справедливо равенство*

$$\int\limits_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{5.9}$$

Иначе говоря, степенной ряд (5.1) *можно интегрировать почленно на отрезке $[0, x]$, $|x| < R$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое число r между числами $|x|$ и $R: |x| < r < R$. В силу теоремы 5.2.1 ряд (5.1) сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$ и, в частности, на отрезке $[0, x]$. Осталось применить теорему 4.5.1. □

Пример 5.3.1. Почленным интегрированием степенных рядов

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots ,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

на отрезке $[0, x]$, где $|x| < 1$, получаются разложения

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots ,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots .$$

Теорема 5.3.2. *Сумма $S(x)$ степенного ряда* (5.1) *имеет производную в любой точке интервала сходимости $(-R, R)$, причем справедливо равенство*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{5.10}$$

Иначе говоря, степенной ряд (5.1) *внутри его интервала сходимости можно дифференцировать почленно.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$ — произвольная фиксированная точка. Докажем, что ряд (5.1) можно почленно дифференцировать в этой точке.

Выберем два числа r_0 и r, которые удовлетворяют условиям $|x_0| < r_0 < r < R$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{5.11}$$

и покажем, что он сходится равномерно на отрезке $[-r_0, r_0]$.

Так как в точке r ряд (5.1) сходится абсолютно, то его общий член ограничен:

$$|a_n|\, r^n \leqslant M,$$

где $M = \text{const}$, а $n = 1, 2, \ldots$. Теперь для произвольного $x \in [-r_0, r_0]$ оценим

$$n|a_n x^{n-1}| \leqslant n\,|a_n| r_0^{n-1} = n\,|a_n| r^{n-1} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} \leqslant Mnq^{n-1},$$

где $q = \dfrac{r_0}{r} < 1$. Итак, ряд (5.11) мажорируется положительным рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Mnq^{n-1}$, который, как нетрудно установить по признаку Даламбера, является сходящимся. Значит, по признаку Вейерштрасса (см. теорему 4.3.1) ряд (5.11) сходится равномерно на отрезке $[-r_0, r_0]$ и, следовательно, ряд (5.1) можно почленно дифференцировать во всех точках этого отрезка (см. теорему 4.6.1) и, в частности, в точке x_0.

Теорема доказана. □

Замечание 5.3.1. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, полученные путем почленного интегрирования и дифференцирования ряда (5.1), имеют такой же радиус сходимости, что и исходный ряд (5.1). В самом деле, в теоремах 5.3.1 и 5.3.2 было доказано, что эти ряды сходятся в промежутке $(-R, R)$, значит, их радиусы сходимости не меньше R. Но ведь ряд (5.1), в свою очередь, получается почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ и почленным интегрированием ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, следовательно, и R не может быть меньше упомянутых радиусов сходимости. Таким образом, радиусы сходимости всех трех рядов равны между собой.

Многократное применение теоремы 5.3.2 дает

Следствие 5.3.1. *Сумма* $S(x)$ *степенного ряда* (5.1) *в интервале сходимости* $(-R, R)$ *имеет производные всех порядков, которые могут быть получены путем почленного дифференцирования ряда* (5.1) *соответствующее число раз.*

§ 5.4. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора

Представление функции в виде суммы степенного ряда или, иными словами, разложение функции в степенной ряд имеет важное теоретическое и практическое значение.

Определение 5.4.1. Говорят, что функция $f(x)$ в некоторой окрестности $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R > 0$, точки x_0 разлагается в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, если в этой окрестности данный степенной ряд сходится и его сумма равна $f(x)$, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \tag{5.12}$$

Определение 5.4.2. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Ряд

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \tag{5.13}$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 5.4.1. *Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 разлагается в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, т. е. для всех x из упомянутой окрестности справедливо равенство*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \tag{5.14}$$

Тогда этот степенной ряд определяется однозначно и является рядом Тейлора функции $f(x)$, т. е. коэффициенты a_n данного степенного ряда находятся по формулам Тейлора

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\ , \tag{5.15}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. В силу следствия 5.3.1 функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0 и имеет место равенство

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k - n + 1) a_k (x - x_0)^{k-n}, \tag{5.16}$$

$n = 1, 2, \ldots$. В последнем равенстве, полагая $x = x_0$, получим

$$f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n,$$

а следовательно,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

что и требовалось доказать. □

Итак, мы доказали, что *если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 разлагается в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$* и, стало быть, это разложение единственное:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots . \quad (5.17)$$

Поскольку ряд Тейлора можно составить для произвольной бесконечно дифференцируемой в окрестности точки x_0 функции, то возникает естественный вопрос: является ли ряд Тейлора функции $f(x)$ сходящимся в рассматриваемой окрестности точки x_0 и, если да, то будет ли его сумма равна $f(x)$? Как показывает следующий пример, ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный.

Пример 5.4.1. Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

бесконечно дифференцируема на всей оси x, причем

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 0,$$

т. е. все коэффициенты ряда Тейлора рассматриваемой функции в точке $x_0 = 0$ равны нулю. Следовательно, ряд Тейлора этой функции в точке $x_0 = 0$ сходится на всей оси x и его сумма равна нулю, в то время как данная функция не нулевая.

Таким образом, мы доказали, что функция $f(x)$, определенная формулой (5.18), не разлагается в ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$. Наша задача теперь заключается в нахождение условий, при которых функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора.

Теорема 5.4.2. *Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0 функция. Для того чтобы в этой окрестности $f(x)$ можно было разложить в ряд Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$, в формуле Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad (5.19)$$

стремился к нулю для всех точек указанной окрестности, когда $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \quad (5.20)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки x_0, т. е. имеет место разложение (5.17). А это означает, что разность между суммой $f(x)$ и частичной суммой n-го порядка ряда (5.17), равная, согласно (5.19), остаточному члену $R_n(x)$ в формуле Тейлора, стремится к нулю при $n \to \infty$ для всех точек из рассматриваемой окрестности точки x_0.

Достаточность. Предположим, что имеет место равенство (5.20), т. е.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right] \right| = \lim_{n\to\infty} |f(x) - S_n(x)| = 0,$$

где $S_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда (5.17). А это означает, что ряд Тейлора (5.17) сходится и его сумма равна $f(x)$, т. е. $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора.

Теорема полностью доказана. □

Следующее достаточное условие разложимости функций в ряд Тейлора имеет большое практическое значение и охватывает ряд важных случаев.

Теорема 5.4.3. *Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет производные всех порядков. Если существует такая постоянная $M > 0$, что*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M \tag{5.21}$$

при $n = 0, 1, 2, \ldots$ для всех x из указанной окрестности точки x_0, то $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в этой окрестности.

Доказательство. Согласно теореме 5.4.2 достаточно доказать, что остаточный член $R_n(x)$ в формуле Тейлора (5.19) стремится к нулю при $n \to \infty$ для всех точек из рассматриваемой окрестности точки x_0. В самом деле, представив дополнительный член $R_n(x)$ в форме Лагранжа, в силу (5.21) получим следующую оценку:

$$|R_n(x)| =$$

$$= \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leqslant \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{5.22}$$

где $0 < \theta < 1$. С помощью признака Даламбера легко убедиться, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится, поэтому, в силу необходимого признака сходимости, общий член этого ряда стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Значит, согласно оценки (5.22),

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Чаще всего приходится иметь дело со случаем, когда $x_0 = 0$ и функция $f(x)$ разлагается в ряд непосредственно по степеням x:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \,. \tag{5.23}$$

Этот ряд называется *рядом Маклорена функции $f(x)$*.

§ 5.5. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

Теорема 5.4.3 охватывает ряд важных случаев.

1. Эта теорема непосредственно применима к функциям e^x, $\sin x$, $\cos x$ в любом интервале $(-R, R)$. Действительно,

$$|(e^x)^{(n)}| = |e^x| \leqslant e^R,$$

$$|(\sin x)^{(n)}| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

$$|(\cos x)^{(n)}| = \left|\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1.$$

Итак, функции e^x, $\sin x$ и $\cos x$ разлагаются в ряд Тейлора по степеням x. Вычисляя коэффициенты Тейлора $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ этих функций, мы получим разложения

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ , \tag{5.24}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\ , \tag{5.25}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ . \tag{5.26}$$

2. Как уже было установлено в примере 5.3.1, функции $f(x) = \ln(1 + x)$ и $f(x) = \operatorname{arctg} x$ разлагаются в ряд Маклорена следующим образом:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{5.27}$$

при $x \in (-1, 1)$,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \tag{5.28}$$

при $x \in (-1, 1)$.

Замечание 5.5.1. Разложение (5.27) остается справедливым и при $x = 1$. Следовательно,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ . \tag{5.29}$$

Замечание 5.5.2. Разложение (5.28) также справедливо при $x = 1$. При этом имеем

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \ . \tag{5.30}$$

Разложения (5.29) и (5.30) можно использовать для вычисления чисел $\ln 2$ и π с любой степенью точности. В качестве приближенных значений этих чисел можно брать частичные суммы рядов (5.29) и (5.30). При этом в силу признака Лейбница допущенная погрешность не превзойдет первого из отброшенных членов.

Глава 6

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 6.1. Предварительные сведения о периодических функциях

Определение 6.1.1. Функция $f(x)$ называется *периодической с периодом* $T \neq 0$, если

1) из того, что она определена в некоторой точке x следует, что она определена во всех точках $x + kT$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$,

2) для любого x из области ее определения справедливо равенство $f(x + T) = f(x)$.

Теорема 6.1.1. *Если число $T \neq 0$ является периодом функции $f(x)$, то для произвольного $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ число kT также является периодом этой функции.*

Доказательство. Пусть $T \neq 0$ — период функции $f(x)$. Тогда для любого $k > 0$ будет

$$f(x + kT) = f[x + (k-1)T + T] = f[x + (k-1)T] =$$

$$= f[x + (k-2)T + T] = f[x + (k-2)T] = \ldots = f(x + T) = f(x).$$

А это значит, что kT, $k > 0$, является периодом функции $f(x)$.

Далее,

$$f(x - T) = f[(x - T) + T] = f(x),$$

а следовательно, число $-T$ тоже является периодом функции $f(x)$. Но тогда по только что доказанному, число $k(-T) = -kT$, $k > 0$, также является периодом функции $f(x)$.

Теорема доказана. □

Теорема 6.1.2. *Если числа $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$ являются периодами функции $f(x)$, то число $T_1 + T_2$ также является периодом этой функции.*

Доказательство. Действительно,

$$f[x + (T_1 + T_2)] = f[(x + T_1) + T_2] = f(x + T_1) = f(x). \qquad \square$$

Последние две теоремы, в частности, показывают, что периодическая функция имеет бесконечно много периодов. Оказывается, что *если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, отличная от постоянной, то она имеет наименьший положительный период, который обычно и называют основным периодом или просто периодом функции $f(x)$.*

Постоянная функция $f(x) = C = \text{const}$ является периодической функцией. Для этой функции любое число T является периодом и, следовательно, для нее не существует наименьший период.

Простейшими примерами периодических функций являются тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$. Периодом этих функций является $T = 2\pi$.

В физике простейшей периодической функцией обычно считают «гармонику» или «гармоническое колебание»

$$\xi(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad -\infty < t < +\infty,$$

где A называется *амплитудой*, ω — *частотой*, а φ — *начальной фазой* гармонического колебания. Нетрудно заметить, что периодом гармонического колебания является число $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Теорема 6.1.3. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ — периодические функции с одним и тем же периодом T. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, также являются периодическими с периодом T.*

Доказательство. Докажем, что, например, функция $h(x) = f(x) + g(x)$ является периодической с периодом T. В самом деле,

$$h(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x) + g(x) = h(x).$$

Точно так же проводится доказательство и для остальных функций.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 6.1.4. *Пусть $f(x)$ — периодическая интегрируемая функция с периодом T. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

для любого действительного числа a.

Доказательство. В самом деле,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx =$$
$$= \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx,$$

так как, в силу периодичности функции,

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(x-T)\,d(x-T) = \int_0^a f(t)\,dt,$$

где была произведена замена переменной $t = x - T$.

Теорема доказана. □

Замечание 6.1.1. Из последней теоремы следует, что *интеграл от периодической функции с периодом T по любому отрезку длины T имеет одно и то же значение*, т. е.

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx.$$

§ 6.2. Тригонометрическая система. Ортогональность тригонометрической системы

Определение 6.2.1. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на отрезке $[a, b]$, называются *ортогональными*, если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Определение 6.2.2. Система функций $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, определенных на отрезке $[a, b]$, называется *ортогональной*, если функции данной системы попарно ортогональны:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0,$$

где $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ и $n \neq m$. При этом предполагается, что

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx > 0$$

для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим систему функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx, \ldots\ . \tag{6.1}$$

Эта система называется *тригонометрической системой*.

Теорема 6.2.1. *Тригонометрическая система* (6.1) *является ортогональной на отрезке* $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Докажем попарную ортогональность функций системы (6.1):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0, \tag{6.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0, \tag{6.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]\,dx = 0, \tag{6.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]\,dx = 0, \tag{6.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx = 0 \tag{6.6}$$

для всех $n, m = 1, 2, \ldots$ и $n \neq m$. В случае $n = m$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = \pi, \tag{6.7}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \pi. \tag{6.8}$$

Теорема доказана. □

§ 6.3. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье

Определение 6.3.1. Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{6.9}$$

где a_0, a_n и b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — действительные числа, называется *тригонометрическим рядом.*

Тригонометрический ряд (6.9) в зависимости от коэффициентов a_0, a_n и b_n может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Определение 6.3.2. Если тригонометрический ряд (6.9) сходится для всех x и его сумма равна $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{6.10}$$

то говорят, что функция $f(x)$ *разлагается в тригонометрический ряд.*

Здесь возникает естественный вопрос: как связаны коэффициенты a_0, a_n и b_n с функцией $f(x)$, если справедливо разложение (6.10)? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 6.3.1. *Пусть функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд* (6.10). *Если этот ряд сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, то коэффициенты a_0, a_n и b_n определяются по формулам*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \tag{6.11}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \tag{6.12}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \tag{6.13}$$

$n = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Проинтегрируем равенство (6.10) согласно теореме 4.5.1 о почленном интегрировании функциональных рядов. Получим (в силу равенств (6.2) (6.3))

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \\ = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx \right] = a_0 \pi,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Для того чтобы определить коэффициент a_n, умножим равенство (6.10) на $\cos nx$ и опять проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это даст (в силу равенств (6.2), (6.4), (6.5), (6.8))

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx\, dx \right] = \\ = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = a_n \pi,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Аналогично, чтобы определить коэффициент b_n, следует умножить равенство (6.10) на $\sin nx$ и опять проинтегрировать на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда получится (в силу равенств (6.3), (6.4), (6.6), (6.7))

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{a_0}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, dx + b_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx \right] =$$
$$= b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = a_n \pi,$$

откуда

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Теорема доказана. □

Определение 6.3.3. Числа a_0, a_n и b_n, определяемые по формулам (6.11), (6.12) и (6.13), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по тригонометрической системе (6.1).

Определение 6.3.4. Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

коэффициенты a_0, a_n и b_n которого определяются по формулам (6.11), (6.12) и (6.13), называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Замечание 6.3.1. Для существования интегралов (6.11), (6.12) и (6.13) достаточно потребовать интегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Поэтому каждой интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{6.14}$$

Однако если от функции $f(x)$ не требовать ничего, кроме интегрируемости на отрезке $[-\pi, \pi]$, то знак соответствия в соотношении (6.14), вообще говоря, нельзя заменить знаком равенства.

Для того чтобы сформулировать основную теорему о сходимости тригонометрического ряда Фурье, введем понятия кусочно-непрерывной и кусочно-дифференцируемой функций.

Определение 6.3.5. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода.

Определение 6.3.6. Кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ называется *кусочно-дифференцируемой*, если $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на этом отрезке, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых, однако, существуют конечные правое и левое предельные значения: $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$. При этом предполагается также, что существуют конечные предельные значения $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$ в концах отрезка $[a, b]$.

Теорема 6.3.2. *Ряд Фурье кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке x этого отрезка, причем для суммы*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{6.15}$$

этого ряда выполняются равенства

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi), \tag{6.16}$$

и

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}. \tag{6.17}$$

Замечание 6.3.2. Сумма $S(x)$, очевидно, равна $f(x)$, если в точке $x \in (-\pi, \pi)$ функция непрерывна. В самом деле, тогда $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$, а следовательно,

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Замечание 6.3.3. Отметим без доказательства, что коэффициенты Фурье a_0, a_n и b_n функции $f(x)$ удовлетворяют *неравенству Бесселя*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{6.18}$$

Для любой кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ справедливо *равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{6.19}$$

§ 6.4. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-\pi,\pi]$, называется *нечетной*, если

$$f(-x) = -f(x),$$

и называется *четной*, если

$$f(-x) = f(x)$$

для произвольного $x \in [-\pi,\pi]$.

Нетрудно доказать, что *для нечетной функции $f(x)$ справедливо равенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0. \tag{6.20}$$

В самом деле,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$= -\int_{0}^{-\pi} f(-x)\,d(-x) + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Точно таким же образом устанавливается, что *для четной функции справедливо* равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{6.21}$$

Пусть теперь $f(x)$ — четная интегрируемая функция, определенная на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда произведение $f(x)\sin nx$ является нечетной функцией на отрезке $[-\pi, \pi]$ и, согласно (6.20),

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$$

для произвольного $n = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, *ряд Фурье четной функции $f(x)$ содержит только косинусы*:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{6.22}$$

причем, в силу (6.21), коэффициенты a_0 и a_n могут быть найдены по формулам

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \tag{6.23}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \tag{6.24}$$

Если же $f(x)$ является нечетной интегрируемой функцией, определенной на отрезке $[-\pi, \pi]$, то нечетной будет и произведение $f(x)\cos nx$ и, стало быть (согласно (6.20))

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

для произвольного $n = 1, 2, \ldots$.

Итак, мы пришли к заключению, что *ряд Фурье нечетной функции $f(x)$ содержит лишь синусы*:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{6.25}$$

При этом, ввиду четности произведения $f(x)\sin nx$, имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{6.26}$$

§ 6.5. Ряды Фурье для $2l$-периодических функций

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l, l]$. Требуется разложить эту функцию в ряд Фурье. Для этого сделаем замену переменной

$$x = \frac{lt}{\pi}\,. \tag{6.27}$$

Тогда получим функцию $\varphi(t) = f\left(\dfrac{lt}{\pi}\right)$, которая, очевидно, уже определена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Следовательно, мы можем составить ряд Фурье функции $\varphi(t)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt).$$

Вернемся теперь к прежней переменной x (см. (6.27)), полагая в последнем разложении

$$t = \frac{\pi x}{l}. \tag{6.28}$$

Тогда мы получим ряд Фурье функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-l, l]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{6.29}$$

где коэффициенты a_0, a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx, \tag{6.30}$$

. . . .

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{6.31}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{6.32}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. В самом деле,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,d\frac{\pi x}{l} = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx.$$

Точно таким же образом доказываются формулы (6.31) и (6.32).

Как и в предыдущем параграфе, для четных и нечетных функций, определенных на отрезке $[-l, l]$, получим следующие разложения:

для четных функций —

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{6.33}$$

и *для нечетных функций* —

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{6.34}$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx, \tag{6.35}$$

. . . .

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{6.36}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{6.37}$$

Замечание 6.5.1. Пусть функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[0, l]$. Ее можно продолжить различным образом на отрезок $[-l, 0]$, в частности: 1) четно и 2) нечетно. В первом случае на отрезке $[-l, l]$ получится четная функция, для которой справедливо разложение (6.33). Во втором случае на отрезке $[-l, l]$ получится нечетная функция с разложением (6.34). На интервале $(0, l)$ каждый из рядов (6.33) и (6.34) сходится к $f(x)$ (в точках непрерывности функции $f(x)$).

Следовательно, мы можем сказать, что каждую *кусочно-дифференцируемую функцию* $f(x)$, *заданную на отрезке* $[0, l]$, *можно, по желанию, разложить в ряд* (6.33) *по одним косинусам или в ряд* (6.34) *по одним синусам*.

Глава 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 7.1. Дифференциальные уравнения. Общие понятия

Решения различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные с искомой функцией и производными этой функции различных порядков. Такие уравнения называются *дифференциальными*.

Итак: *дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.*

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется *обыкновенным* дифференциальным уравнением, если же независимых переменных две или более, то такое уравнение называется дифференциальным уравнением *в частных производных*.

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется *порядком* дифференциального уравнения.

Уравнение

$$x^2y' + 2y + 3x - 13 = 0$$

где $y = y(x)$ — неизвестная функция, является примером обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, а уравнение

$$x^2y\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

где $z = z(x, y)$ — неизвестная функция, является примером дифференциального уравнения в частных производных второго порядка.

Так как эта глава посвящена только обыкновенным дифференциальным уравнениям, то договоримся в дальнейшем опускать слово «обыкновенный».

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем виде записывается так:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{7.1}$$

где F — некоторая функция от трех переменных, x — независимая переменная, а $y = y(x)$ — искомая функция.

Аналогично, дифференциальное уравнение n-го порядка имеет следующий общий вид:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.2}$$

где F уже есть функция от $n + 2$ переменных.

Определение 7.1.1. Функция $y = y(x)$ называется *решением* дифференциального уравнения (7.2) на отрезке $[a, b]$, если

1) на этом отрезке она имеет производные до n-го порядка включительно,

2) точка $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))$ для произвольного $x \in \in [a, b]$ принадлежит области определения функции F и

3) имеет место тождество

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0,$$

т. е. $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ для всех $x \in [a, b]$.

График решения дифференциального уравнения (7.2) принято называть *интегральной кривой* этого уравнения. Часто вместо того, чтобы сказать «решить дифференциальное уравнение» говорят «*проинтегрировать дифференциальное уравнение*». Эти договоренности объясняются тем, что нахождение решения дифференциального уравнения всегда связано с необходимостью *интегрирования* входящих в это уравнение функций.

§ 7.2. Дифференциальное уравнение первого порядка. Поле направлений. Метод изоклин

Дифференциальное уравнение первого порядка связывает независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную y'.

Рассмотрим общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{7.3}$$

где, как правило, мы будем предполагать, что F — некоторая функция от трех переменных, x — независимая переменная, а $y = y(x)$ — искомая функция. Если уравнение (7.3) разрешимо относительно y', то его записывают в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{7.4}$$

и называют дифференциальным уравнением первого порядка, *разрешенным относительно производной* y'.

Если функцию $f(x, y)$ представить в виде $f(x, y) = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то уравнение (7.4) примет вид

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{7.5}$$

Это так называемая *дифференциальная форма* уравнения первого порядка.

Теперь поясним геометрический смысл уравнения (7.4). Пусть D — область определения функции $f(x, y)$, а $y = y(x)$ — интегральная кривая этого уравнения. По определению 7.1.1 это значит, что справедливо тождество

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x)). \tag{7.6}$$

Следовательно, в каждой своей точке $(x, y(x))$ интегральная кривая $y = y(x)$ имеет касательную, угловой коэффициент которой $k = y'(x) = f(x, y(x))$. Итак, каждой точке $M(x, y) \in D$ соответствует некоторое направление, угловой коэффициент которого равен $f(x, y)$. Указывая это направление, скажем, вектором $(1, f(x, y))$, исходящим из точки $M(x, y) \in D$, мы, тем самым, область D заполним векторами (рис. 7.1). Область D вместе с этими векторами называется *полем направлений* дифференциального уравнения (7.4).

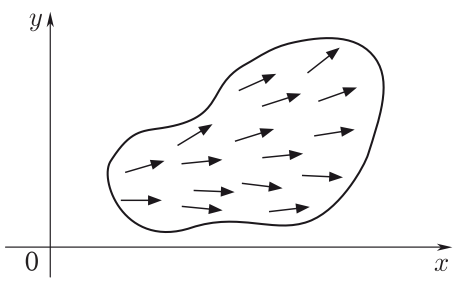

Рис. 7.1

Таким образом, *дифференциальное уравнение* (7.4) *задает свое поле направлений, причем интегральные кривые этого* *уравнения суть кривые, для которых направления касательных в каждой точке совпадают с направлениями заданного поля.*

Геометрическое место точек (x, y), в которых выполняется равенство
$$f(x, y) = k, \quad k = \text{const} \tag{7.7}$$
называется *изоклиной* дифференциального уравнения (7.4), а само равенство (7.7) называется *уравнением изоклины*.

Зная изоклины дифференциального уравнения (7.4), можно начертить эскиз интегральной кривой. Этот метод построения интегральных кривых называется *методом изоклин*.

Пример 7.2.1. Методом изоклин построить интегральную кривую дифференциального уравнения $y' = x$, которая проходит через начало координат.

Изоклинами дифференциального уравнения $y' = x$ являются прямые $x = k = \text{const}$ (рис. 7.2). Направление поля во всех точках прямой $x = k$ определяется вектором $(1, k)$.

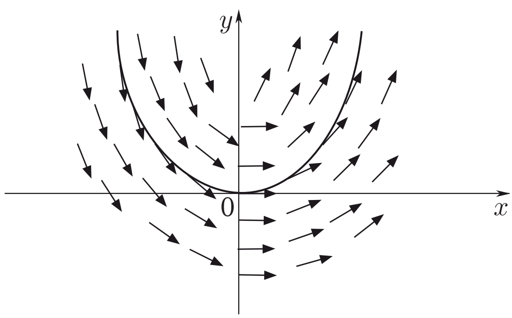

Рис. 7.2

Двигаясь от точки $(0, 0)$, построим кривую, которая при пересечении с изоклиной $x = k$ касается направления $(1, k)$ (рис. 7.2). Это и будет искомая интегральная кривая. $\square$

§ 7.3. Задача Коши. Общее решение. Теорема Коши

Интегрирование дифференциального уравнения в общем случае приводит к бесконечному множеству решений. Например, легко догадаться, что дифференциальное уравнение $y' = 2x$ имеет бесчисленное множество решений $y = x^2 + C$, где C — произвольная постоянная. Для того чтобы из этого множества выделить вполне конкретное решение, следует накладывать на это решение дополнительное условие, скажем, потребовать, чтобы оно прошло через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$. Например, через точку $M_0 = (1, 2)$ проходит интегральная кривая $y = x^2 + 1$.

Обобщая сказанное, мы приходим к следующей *задаче Коши* для дифференциального уравнения первого порядка: решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{7.8}$$

при *начальном условии*

$$y(x_0) = y_0. \tag{7.9}$$

Точка (x_0, y_0), которая очевидно должна принадлежать области определения D функции $f(x, y)$, называется *начальной точкой* задачи Коши.

Определение 7.3.1. *Общим решением* уравнения (7.8) называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную C и удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) при любом допустимом C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения (7.8) (см. определение 7.1.1),

2) какова бы ни была задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{7.10}$$

существует постоянная $C = C_0$ такая, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением именно этой задачи Коши.

Замечание 7.3.1. Второе условие последнего определения означает, что уравнение

$$\varphi(x_0, C) = y_0 \tag{7.11}$$

имеет хотя бы одно решение $C = C_0$.

Определение 7.3.2. *Частным решением* дифференциального уравнения (7.8) называется любое решение вида $y = \varphi(x, C_0)$, полученное из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Если общее решение дифференциального уравнения (7.8) найдено в неявном виде: $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом*. В этом случае неявно заданная функция $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется *частным интегралом*.

Пример 7.3.1. Проверить, что функция $y = Ce^{2x}$ является общим решением уравнения $y' = 2y$.

Проверим условия определения 7.3.1:

1) функция $y = Ce^{2x}$ является решением уравнения $y' = 2y$, так как $(Ce^{2x})' = 2(Ce^{2x})$,

2) уравнение $Ce^{2x_0} = y_0$ имеет решение $C_0 = y_0e^{-2x_0}$ (см. замечание 7.3.1). □

Следующая теорема Коши дает достаточное условие для разрешимости задачи Коши (7.10).

Теорема 7.3.1 (существования и единственности решения задачи Коши). *Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости* $\mathbf{R^2}$. *Тогда какова бы ни была начальная точка $(x_0, y_0) \in D$, существует отрезок $[x_0 - h, x_0 + h]$, $h > 0$, такой, что задача Коши* (7.10) *имеет решение $y = \varphi(x)$ на этом отрезке и это решение единственно.*

Геометрический смысл этой теоремы заключается в том, что при сделанных предположениях в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in D$ существует интегральная кривая дифференциального уравнения (7.8), которая проходит через эту точку, причем такая интегральная кривая в указанной окрестности единственна (рис. 7.3).

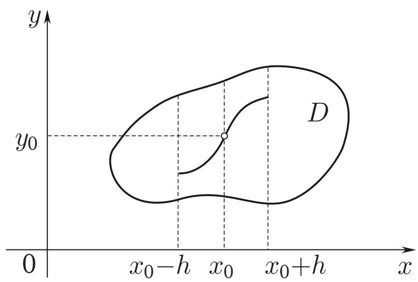

Рис. 7.3

Определение 7.3.3. *Особым решением* дифференциального уравнения (7.8) называется такое ее решение $y = \psi(x)$, во всех точках которого условие единственности решения не выполняется, иначе говоря, для произвольной точки $(x_0, \psi(x_0))$ существует, по крайней мере, еще одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$ уравнения (7.8), проходящая через эту точку и не совпадающая с интегральной кривой $y = \psi(x)$.

Особые решения не зависят от постоянной C. Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной C.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

Справедливо следующее утверждение: *пусть функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывна в области* D *и ее частная производная* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *существует всюду в* D, *за исключением некоторых точек* $(x,y) \in D$, *в* которых $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \infty$. *Тогда особыми решениями дифференциального уравнения* (7.8) *могут быть только такие кривые* $y = \psi(x)$, *во всех точках которых* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \infty$.

Укажем на еще один признак нахождения особых решений дифференциального уравнения (7.8). Для этого сначала введем следующее понятие: кривая $y = \psi(x)$ называется *огибающей семейства кривых* $y = \varphi(x,C)$, если она в каждой своей точке $(x,\psi(x))$ касается, по крайней мере, одной из кривых семейства $y = \varphi(x,C)$, причем каждой дуги кривой $y = \psi(x)$ касается бесконечное множество кривых $y = \varphi(x,C)$.

Кривую, подозрительную на огибающую семейства кривых $y = \varphi(x,C)$, можно найти путем исключения параметра C из системы уравнений:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x,C),\\ 0 &= \frac{\partial \varphi(x,C)}{\partial C}. \end{aligned}$$

Справедливо утверждение: *огибающая семейства интегральных кривых* $y = \varphi(x,C)$ *дифференциального уравнения* (7.8) *является особым решением этого уравнения.*

§ 7.4. Простейшие дифференциальные уравнения

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, не содержащее искомую функцию y:

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{7.12}$$

где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция.

Из определения первообразной следует, что общим решением уравнения (7.12) будет

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{7.13}$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$.

Пример 7.4.1. Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = xe^x.$$

Интегрируя данное уравнение, получим

$$y = \int xe^x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = \\ = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C. \quad \square$$

2. Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, не содержащее независимую переменную x:

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \tag{7.14}$$

Предположим, что функция $f(y)$ непрерывна на некотором отрезке $[c,d]$ и не обращается на нем в нуль. Тогда уравнение (7.14) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$dx = \frac{dy}{f(y)}.$$

Интегрируя это уравнение, находим общее решение уравнения (7.14) в случае, когда $f(y) \neq 0$ для всех $y \in [c,d]$:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} = G(y) + C, \tag{7.15}$$

где $G(y)$ — некоторая первообразная функции $\dfrac{1}{f(y)}$.

Пусть теперь $f(y^*) = 0$ для некоторого $y^* \in [c,d]$. Тогда нетрудно заметить, что $y = y^*$ также является решением уравнения (7.14).

Таким образом, в случае $f(y^*) = 0$ решениями уравнения (7.14) будут функции (7.15), когда $y \in [c, y^*) \cup (y^*, d]$, и функция $y = y^*$.

Пример 7.4.2. Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y - 1.$$

Правая часть $f(y) = y - 1$ обращается в нуль в точке $y = 1$, и очевидно, что функция $y = 1$ является решением нашего дифференциального уравнения.

Теперь предположим, что $y \neq 1$. Тогда наше уравнение перепишем в виде

$$dx = \frac{dy}{y-1}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$x = \int \frac{dy}{y-1} = \ln|y-1| + C.$$

Таким образом, решениями нашего уравнения являются $x = \ln|y-1| + C$, когда $y \neq 1$, и функция $y = 1$. □

§ 7.5. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, заданное в *дифференциальной форме*:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{7.16}$$

Пусть функция $M(x, y)$ зависит только от переменной x, а $N(x, y)$ — только от переменной y: $M(x, y) = f(x)$, $N(x, y) = g(y)$. Тогда уравнение

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0 \tag{7.17}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*.

Предполагая, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в своих областях определения и интегрируя почленно уравнение (7.17), получим

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C \tag{7.18}$$

или

$$F(x) + G(x) = C,$$

где $F(x)$ и $G(x)$ — некоторые первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Это и есть *общий интеграл* уравнения (7.17).

Пример 7.5.1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{1+y^2} = 0.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{1+y^2} = C$$

или

$$\ln|x| - \operatorname{arctg} y = C. \qquad \square$$

Если в уравнении (7.16) функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ допускают разложение

$$M(x, y) = M_1(x)M_2(y), \quad N(x, y) = N_1(x)N_2(y),$$

то полученное уравнение

$$M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)N_2(y)\,dy = 0 \tag{7.19}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Предположим, что $N_1(x)M_2(y) \neq 0$. Уравнение (7.19) разделим на это произведение. Получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0,$$

общий интеграл которого находится описанным выше способом.

Замечание 7.5.1. При проведении почленного деления уравнения (7.19) на $N_1(x)M_2(y)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $N_1(x)M_2(y) = 0$ и найти те решения, которые не могут быть получены из общего решения ни при каких значениях постоянной C. В окончательном ответе кроме общего интеграла следует указать и эти решения.

Пример 7.5.2. Решить дифференциальное уравнение

$$(y + xy)\,dx + (x - xy)\,dy = 0. \tag{7.20}$$

Данное уравнение перепишем в виде:

$$y(1+x)\,dx + x(1-y)\,dy = 0.$$

Разделим это уравнение на $xy \neq 0$:

$$\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, находим общее решение уравнения (7.20):

$$x + \ln|x| + \ln|y| - y = C$$

или

$$\ln|xy| + x - y = C. \tag{7.21}$$

Теперь отдельно рассмотрим случай уравнения $xy = 0$. Решения $x = 0$ и $y = 0$ этого уравнения, как нетрудно проверить, являются также решениями уравнения (7.20) и не получаются из общего решения (7.21) ни при каких значениях C. Значит, $x = 0$ и $y = 0$ следует включить в общее решение уравнения (7.20). □

§ 7.6. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией степени* m, если для произвольного $t > 0$ справедливо

$$f(tx,ty) = t^m f(x,y), \tag{7.22}$$

где, конечно, предполагаем, что точка (tx,ty) принадлежит области определения функции $f(x,y)$.

Например, функция $f(x,y) = x^2 + xy$ является примером однородной 2-й степени функции, поскольку

$$f(tx,ty) = t^2x^2 + t^2xy = t^2(x^2+xy) = t^2 f(x,y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{7.23}$$

называется *однородным*, если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени m.

Покажем, что однородное дифференциальное уравнение (7.23) можно свести к уравнению с разделяющимися переменными.

Заметим, что если взять $t = x > 0$ ($t = -x > 0$, когда $x < < 0$), то однородные степени m функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ можно преобразовать следующим образом:

$$M(x,y) = M\left(x \cdot 1,\, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

$$N(x,y) = N\left(x \cdot 1,\, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Теперь предположим, что $N(x,y) \neq 0$ (случай $N(x,y) \neq 0$, как и случай $x = 0$ следует рассматривать отдельно). Тогда уравнение (7.23) можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

где обозначили $F\left(\frac{y}{x}\right) = -\dfrac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}$.

Для нахождения общего интеграла полученного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.24}$$

произведем замену переменных: $\dfrac{y}{x} = z$. Тогда

$$y = xz, \quad \frac{dy}{dx} = z + x\,\frac{dz}{dx}$$

и, следовательно, уравнение (7.24) примет вид

$$z + x\,\frac{dz}{dx} = F(z)$$

или

$$x\,dz = (F(z) - z)\,dx. \tag{7.25}$$

Итак, однородное уравнение (7.23) свели к уравнению с разделяющимися переменными (7.25), общий интеграл которого в случае $x(F(z) - z) \neq 0$ имеет вид

$$\int \frac{dz}{F(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Нам осталось вернуться к исходной функции y. Если $x = 0$ или $F(z) - z = 0$ дают решения уравнения (7.23), то их также следует включить в общее решение этого уравнения.

Пример 7.6.1. Решить уравнение

$$(x^2 - y^2)\,dx + xy\,dy = 0.$$

Это уравнение однородное, поскольку $M(x, y) = x^2 - y^2$ и $N(x, y) = xy$ — однородные функции второй степени.

Сразу заметим, что $x = 0$ — решение данного уравнения.

Пусть $x \neq 0$. Положим $\dfrac{y}{x} = z$, то есть $y = xz$. Тогда $dy = z\,dx + x\,dz$ и, следовательно, наше уравнение примет вид

$$(x^2 - x^2z^2)\,dx + x^2z(z\,dx + x\,dz) = 0$$

или

$$dx + xz\,dz = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{x} = -z\,dz, \quad \ln|x| = -\frac{z^2}{2} + \ln|C|, \quad x = Ce^{-z^2/2}.$$

Учитывая, что $z = \dfrac{y}{x}$, окончательно получим общий интеграл нашего уравнения:

$$x = Ce^{-y^2/(2x^2)}.$$ □

Замечание 7.6.1. Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{7.26}$$

приводится к однородному дифференциальному уравнению с помощью замены переменных $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, где (x_0, y_0) — единственное решение $(a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$ системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Если же последняя система не имеет решений, то уравнение (7.26) приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = a_1 x + b_1 y$.

Пример 7.6.2. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 2}{x + y - 4}. \tag{7.27}$$

Так как система

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 3$, то следует произвести замену переменных $u = x - 1$, $v = y - 3$. Тогда $dx = du$, $dy = dv$; следовательно, данное уравнение примет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 1 - v - 3 + 2}{u + 1 + v + 3 - 4} = \frac{u - v}{u + v}$$

или

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - \dfrac{v}{u}}{1 + \dfrac{v}{u}}. \tag{7.28}$$

Положим $\dfrac{v}{u} = z$, откуда

$$v = uz, \qquad \frac{dv}{du} = z + u\,\frac{dz}{du}.$$

Теперь уравнение (7.28) примет вид

$$z + u\,\frac{dz}{du} = \frac{1 - z}{1 + z}$$

или

$$\frac{(1 + z)\,dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{du}{u}\,.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - 2z - z^2| = \ln|u| - \frac{1}{2}\,\ln C$$

или

$$(1 - 2z - z^2)\,u^2 = C.$$

Возвращаясь к переменным x и y с помощью формул $z = \frac{y-3}{x-1}$ и $u = x - 1$, окончательно получим общий интеграл уравнения (7.27):

$$x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 8y - 14 = C. \qquad \square$$

Пример 7.6.3. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+y+2}. \tag{7.29}$$

Система

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

не имеет решений. Положим $z = x + y$. Так как $dz = dx + dy$, то уравнение (7.29) примет вид

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z-1}{z+2}$$

или

$$\frac{z+2}{2z+1}\,dz = dx.$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$\int \frac{z+2}{2z+1}\,dz = x + C, \quad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2z+1}\right)dz = x + C,$$

$$2z + 3\ln|2z+1| = 4x + C.$$

Далее, возвращаясь к первоначальной функции y и переменной x, учитывая замену $z = x + y$, окончательно получим общий интеграл исходного дифференциального уравнения (7.29):

$$2x - 2y - 3\ln|2x + 2y + 1| = C. \qquad \square$$

§ 7.7. Линейные уравнения

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{7.30}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением* первого порядка.

Если правая часть $q(x)$ уравнения (7.30) равна нулю: $q(x) \equiv \equiv 0$, то уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{7.31}$$

называется линейным *однородным* дифференциальным уравнением. В противном случае ($q(x) \neq 0$) уравнение (7.30) называется линейным *неоднородным* дифференциальным уравнением.

Однородное дифференциальное уравнение (7.31) всегда имеет нулевое решение $y(x) = 0$; оно является уравнением с разделяющимися переменными и его общий интеграл находится просто:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \quad (y \neq 0), \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)\,dx \quad (C \neq 0),$$

откуда

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}. \tag{7.32}$$

Итак, (7.32) есть общее решение линейного однородного уравнения первого порядка (7.31). Это решение даст и решение $y(x) = 0$, если разрешить постоянной C принимать также нулевое значение.

Теперь изложим два способа нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения первого порядка (7.30).

1. *Метод Лагранжа или метод вариации произвольной постоянной.*

Суть этого метода заключается в том, что постоянная C в общем решении (7.32) соответствующего однородного уравнения (7.31) заменяется функцией $C(x)$ и ищется общее решение неоднородного уравнения (7.30) в виде

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{7.33}$$

Поставим эту функцию в уравнение (7.30):

$$C'(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} + C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}\,(-p(x)) + p(x)C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} = \\ = q(x),$$

откуда

$$C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} = q(x).$$

Проинтегрировав это уравнение, находим

$$C(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}\, dx + C.$$

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в (7.33), окончательно получаем общее решение неоднородного уравнения (7.30)

$$y = \left[\int q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}\, dx + C\right] e^{-\int p(x)\, dx}. \tag{7.34}$$

2. *Метод Бернулли.*

Суть этого метода заключается в том, что искомая функция неоднородного уравнения (7.30) представляется в виде произведения двух функций:

$$y = u(x)v(x),$$

где хотя бы одна из функций $u(x)$ и $v(x)$ не нулевая и выбирается произвольным образом скажем, $y = \dfrac{y}{v} \cdot v = uv,\ v \neq 0$.

Подставляя функцию $y = uv$ в уравнение (7.30), получим

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

или

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \tag{7.35}$$

Теперь функцию $v = v(x)$ выберем так, чтобы выражение в скобках было равно нулю:

$$v' + p(x)v = 0.$$

Но это есть линейное однородное уравнение и его общее решение находится по формуле (7.32). Возьмем частное решение

$$v = e^{-\int p(x)\, dx}.$$

При такой функции v из (7.35) получаем

$$u' e^{-\int p(x)\, dx} = q(x)$$

или

$$u' = q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}.$$

Следовательно,

$$u = \int q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}\, dx + C,$$

а значит,

$$y = uv = \left[\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right] e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Лагранжа (см. (7.34)).

Замечание 7.7.1. Заметим, что метод Лагранжа — это, по сути, тот же метод Бернулли при $u = C(x)$ и $v = e^{-\int p(x)\,dx}$.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Пример 7.7.1. Методом Лагранжа решить уравнение

$$y' + \frac{1}{x^2}\,y = e^{1/x}.$$

Сначала решаем соответствующее однородное уравнение

$$y' + \frac{1}{x^2}\,y = 0:$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\,y, \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2},$$

откуда находим

$$y = Ce^{1/x}.$$

Теперь общее решение нашего неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)\,e^{1/x}.$$

Имеем

$$y' = C'(x)\,e^{1/x} - \frac{1}{x^2}\,C(x)\,e^{1/x}.$$

Подставляя значения y и y' в наше уравнение, получим

$$C'(x)\,e^{1/x} - \frac{1}{x^2}\,C(x)\,e^{1/x} + \frac{1}{x^2}\,C(x)\,e^{1/x} = e^{1/x},$$

то есть,

$$C'(x) = 1,$$

а значит, $C(x) = x + C$.

Итак, общее решение данного неоднородного уравнения есть $y = (x + C)\,e^{1/x}$. □

Пример 7.7.2. Методом Бернулли решить уравнение

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Применяя подстановку $y = uv$, получим

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2},$$

или

$$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}. \tag{7.36}$$

Функцию v находим, решая уравнение

$$v' + 2xv = 0$$

и выбирая из его общего решения $v = Ce^{-x^2}$ одно частное решение, например, $v = e^{-x^2}$. Подставляя эту функцию в уравнение (7.36), получим

$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}.$$

Общее решение этого уравнения: $u = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Перемножая найденные решения u и v, получим общее решение исходного уравнения: $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + C\right) e^{-x^2}$. □

§ 7.8. Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\lambda}, \tag{7.37}$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, называется *уравнением Бернулли*.

Заметим, что при $\lambda = 0$ уравнение (7.37) превращается в линейное уравнение первого порядка, а при $\lambda = 1$ — в уравнение с разделяющимися переменными.

Покажем, что уравнение Бернулли можно свести к линейному дифференциальному уравнению первого порядка, если обозначить

$$y^{1-\lambda} = z. \tag{7.38}$$

Действительно, разделим (7.37) на $y^{\lambda} \neq 0$:

$$y^{-\lambda}y' + p(x)y^{1-\lambda} = q(x).$$

Применяя подстановку (7.38), учитывая, что $z' = (1-\lambda)y^{-\lambda}y'$, $y^{-\lambda}y' = \dfrac{1}{1-\lambda} \cdot z'$, получим

$$\frac{1}{1-\lambda}\cdot z' + p(x)z = q(x),$$

или

$$z' + (1-\lambda)p(x)z = (1-\lambda)q(x).$$

А это есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое решается описанным в предыдущем параграфе способом.

Пример 7.8.1. Решить уравнение

$$y' + y = e^{2x}y^2.$$

Разделим обе части этого уравнения на $y^2 \neq 0$ и сделаем замену $y^{-1} = z$. Получим уравнение

$$z' - z = -e^{2x}.$$

Решая это линейное уравнение (методом Лагранжа или Бернулли), получим его общее решение $z = Ce^x - e^{2x}$. Значит, исходное уравнение имеет общее решение $y = z^{-1} = (Ce^x - e^{2x})^{-1}$.

Осталось заметить, что данное уравнение имеет также решение $y = 0$, которое мы потеряли при разделении на $y^2 \neq 0$. $\square$

Замечание 7.8.1. Уравнение Бернулли (7.37) разрешается и с помощью метода Бернулли подстановкой $y = u(x)\cdot v(x)$.

Пример 7.8.2. Решить уравнение

$$xy' - y = x^2\sqrt{y}\,.$$

Это — уравнение Бернулли с $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Полагая $y = uv$, получим

$$x(u'v + uv') - uv = x^2\sqrt{uv}\,, \tag{7.39}$$

или

$$xu'v + u(xv' - v) = x^2\sqrt{uv}\,.$$

Функцию v выбираем из общего решения $v = Cx$ уравнения

$$xv' - v = 0.$$

Пусть $v = x$. Тогда уравнение (7.39) примет вид

$$u' = \sqrt{ux}\,.$$

Решая это уравнение, находим его общее решение $u = \left(\dfrac{x^{3/2}}{3} + C\right)^2$.

Перемножая функции $v = x$ и $u = \left(\dfrac{x^{3/2}}{3} + C\right)^2$, получим общее решение $y = x\left(\dfrac{x^{3/2}}{3} + C\right)^2$ исходного уравнения.

Заметим, что $y = 0$ также является решением данного уравнения. $\square$

§ 7.9. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{7.40}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если выражение $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ является *полным дифференциалом* некоторой функции $u(x, y)$:

$$du(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy.$$

Очевидно, что если (7.40) — уравнение в полных дифференциалах, то его можно переписать в виде

$$du(x, y) = 0,$$

откуда следует, что функция

$$u(x, y) = C$$

есть общий интеграл этого уравнения.

Итак, если (7.40) — уравнение в полных дифференциалах, то его интегрирование сводится к нахождению той функции $u(x, y)$, полный дифференциал которой равен левой части этого уравнения.

Следующая теорема позволяет выяснить вопрос о том, является ли (7.40) уравнением в полных дифференциалах или нет.

Теорема 7.9.1. *Пусть функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ и их частные производные $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ непрерывны в некоторой односвязной области D плоскости $\mathbf{R}^2$. Тогда выражение $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом, тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \tag{7.41}$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ есть полный дифференциал:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = du(x,y).$$

Но поскольку

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

то, значит,

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Дифференцируя эти равенства по y и x соответственно, получим

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

откуда и следует равенство (7.41), так как смешанные частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ равны между собой.

Достаточность. Предположим, что в области D выполняется условие (7.41) и докажем, что тогда существует такая функция $u(x,y)$, определенная в области D, что

$$du(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

Из последнего равенства следует, что искомая функция должна удовлетворять требованиям

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \tag{7.42}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{7.43}$$

Если в равенстве (7.42) зафиксировать y и проинтегрировать это равенство по x, то получим

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y), \tag{7.44}$$

где $\varphi(y)$ — неизвестная функция от переменной y.

Для того чтобы найти $\varphi(y)$, продифференцируем функцию (7.44) по y и сравним с (7.43). В результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + \frac{d\varphi(y)}{dy} = N(x,y),$$

или
$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right). \tag{7.45}$$

Покажем, что правая часть последнего равенства зависит только от переменной y, для чего достаточно убедиться, что ее производная по x равна нулю. Действительно, в силу условия (7.41) имеем
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right] =$$
$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right] =$$
$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Итак, обе части равенства (7.45) зависят только от переменной y. Следовательно, из этого равенства можно найти функцию $\varphi(y)$:
$$\varphi(y) = \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right)dy + C. \tag{7.46}$$

Подставляя в (7.44) найденное $\varphi(y)$, окончательно получим искомую функцию $u(x,y)$.

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 7.9.1. При решении дифференциальных уравнений в полных дифференциалах для нахождения функции $u(x,y)$ не обязательно использовать формулы (7.44) и (7.46). Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, который позволил получить эти формулы.

П р и м е р 7.9.1. Решить уравнение
$$(2x+y)\,dx + (x+2y)\,dy = 0.$$

Так как
$$\frac{\partial(2x+y)}{\partial y} = \frac{\partial(x+2y)}{\partial x} = 1,$$
то данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Значит, существует такая функция $u(x,y)$, что
$$du(x,y) = (2x+y)\,dx + (x+2y)\,dy,$$
или
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x+2y. \tag{7.47}$$

Проинтегрировав первое уравнение по x, получим

$$u(x,y)=\int(2x+y)\,dx=x^2+xy+\varphi(y),$$

где роль постоянной играет функция $\varphi(y)$, не зависящая от x. Подставляя полученную функцию $u(x,y)$ во второе уравнение (7.47), будем иметь

$$x+\varphi'(y)=x+2y,$$

или

$$\varphi'(y)=2y,$$

откуда находим $\varphi(y)=y^2+C_1$. Следовательно, $u(x,y)=x^2+xy+y^2+C_1$, а значит, общий интеграл исходного уравнения будет $x^2+xy+y^2+C_1=C_2$, или $x^2+xy+y^2=C$, где $C=C_2-C_1$. □

Если (7.40) не является уравнением в полных дифференциалах, а дифференциальное уравнение

$$\lambda(x,y)M(x,y)\,dx+\lambda(x,y)N(x,y)\,dy=0 \tag{7.48}$$

является уравнением в полных дифференциалах, то тогда функция $\lambda(x,y)$ называется *интегрирующим множителем*.

Ясно, что функция $\lambda(x,y)$ будет интегрирующим множителем, если выполняется условие

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(x,y)M(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,y)N(x,y)\right)$$

(см. теорему 7.9.1), которое после очевидных выкладок примет вид

$$M\,\frac{\partial\lambda}{\partial y}-N\,\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\lambda\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{7.49}$$

Решить это уравнение и найти интегрирующий множитель $\lambda(x,y)$ в общем случае достаточно сложно. Однако эта задача упрощается, если функция $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ зависит только от одного аргумента x или y.

Пусть, например, $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi(x)$ — функция от одного переменного x. Покажем, что тогда интегрирующий множитель λ можно искать как функцию одной переменной x.

При $\lambda = \lambda(x)$ уравнение (7.49) примет вид

$$-N\frac{d\lambda}{dx} = \lambda\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

или

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx.$$

Итак,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \varphi(x)\,dx,$$

откуда получаем

$$\lambda(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx}. \tag{7.50}$$

Точно так же можно показать, что если $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) = \psi(y)$, то в качестве интегрирующего множителя можно взять функцию

$$\lambda(y) = e^{\int \psi(y)\,dy}. \tag{7.51}$$

Пример 7.9.2. Решить уравнение

$$\left(xy + \frac{2}{x}\right)dx + \left(x^2 - \frac{3x}{y^2}\right)dy = 0.$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + \frac{2}{x}\right) = x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - \frac{3x}{y^2}\right) = 2x - \frac{3}{y^2}.$$

Так как $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, то данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Однако

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x - 2x + \dfrac{3}{y^2}}{x^2 - \dfrac{3x}{y^2}} = -\frac{1}{x} = \varphi(x)$$

зависит лишь от переменной x. Значит, интегрируемый множитель $\lambda(x)$ можно найти по формуле (7.50):

$$\lambda(x) = e^{\int \varphi(x)\,dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Умножая исходное уравнение на $\lambda(x) = \dfrac{1}{x}$, получим следующее дифференциальное уравнение в полных дифференциалах:

$$\left(y + \frac{2}{x^2}\right) dx + \left(x - \frac{3}{y^2}\right) dy = 0.$$

Решая это уравнение, находим общий интеграл: $xy - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = C$.
□

§ 7.10. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, y') = 0. \tag{7.52}$$

Если это уравнение удается разрешить относительно y', то получаем одно или несколько уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

которые уже были рассмотрены в предыдущих параграфах.

Однако не всегда удается разрешить уравнение (7.52) относительно производной y' или сделать это бывает достаточно непросто. Тогда для решения этого уравнения применяют так называемый *метод введения параметра*.

Рассмотрим несколько частных случаев уравнения (7.52), которые решаются этим методом.

1. Пусть уравнение (7.52) не содержит неизвестную функцию $y = y(x)$, т. е. имеет вид

$$F(x, y') = 0. \tag{7.53}$$

Покажем, что *если функции* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *такие, что*

$$F(\varphi(t), \psi(t)) = 0,$$

то общее решение уравнения (7.53) *задается параметрическими формулами*

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)\, dt + C. \tag{7.54}$$

Действительно, так как $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$, то можно положить

$$x = \varphi(t), \quad y' = y'_x = \psi(t). \tag{7.55}$$

Поскольку $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, то $y'_t = y'_x x'_t$, или, учитывая равенства (7.55),

$$y'_t = \psi(t)\varphi'(t),$$

откуда и получается параметрическое выражение для y:

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C.$$

Пример 7.10.1. Решить уравнение

$$x = y'\cos y'.$$

Положим $y' = y'_x = \psi(t) = t$. Тогда $x = \varphi(t) = t\cos t$. Для того, чтобы получить параметрическое представление функции y, воспользуемся формулой (7.54):

$$y = \int t(t\cos t)'\,dt = \int t(\cos t - t\sin t)\,dt.$$

Вычисляя последний интеграл, получаем $y = t^2\cos t - t\sin t - \cos t + C$.

Итак,

$$x = t\cos t, \quad y = t^2\cos t - t\sin t - \cos t + C$$

есть общее решение исходного уравнения в параметрической форме. □

2. Пусть уравнение (7.52) не содержит независимую переменную x, т. е. имеет вид

$$F(y, y') = 0. \tag{7.56}$$

Покажем, что *если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ такие, что*

$$F(\varphi(t), \psi(t)) = 0,$$

то общее решение уравнения (7.56) *задается параметрическими формулами*

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C, \quad y = \varphi(t). \tag{7.57}$$

В самом деле, так как $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$, то можно положить

$$y = \varphi(t), \quad y' = y'_x = \psi(t). \tag{7.58}$$

Поскольку $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, то $x'_t = \dfrac{y'_t}{y'_x}$, или, учитывая равенства (7.58),

$$x'_t = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}.$$

Отсюда и получается требуемое параметрическое выражение для x (см. (7.57)):

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C.$$

Пример 7.10.2. Решить уравнение

$$y = (y' - 1)e^{y'}.$$

Положим $y' = y'_x = \psi(t) = t$. Тогда $y = \varphi(t) = (t-1)e^t$. Параметрическое представление для x найдем по формуле (7.57):

$$x = \int \frac{((t-1)e^t)'}{t}\,dt = \int \frac{e^t + (t-1)e^t}{t}\,dt = \int e^t\,dt = e^t + C.$$

Итак, общее решение исходного уравнения задается параметрическими формулами

$$x = e^t + C, \quad y = (t-1)e^t.$$

§ 7.11. Уравнения Лагранжа и Клеро

Дифференциальное уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{7.59}$$

где φ и ψ — заданные функции от y', называется *уравнением Лагранжа*.

Для нахождения общего решения этого уравнения вводится параметр $y' = p$. Тогда уравнение (7.59) принимает вид

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \tag{7.60}$$

Дифференцируя это уравнение по x, получим

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\cdot\frac{dp}{dx},$$

то есть,

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,\frac{dp}{dx}. \tag{7.61}$$

Если $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$, то последнее уравнение равносильно следующему:

$$[p - \varphi(p)]\,\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p). \tag{7.62}$$

А это — линейное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $x = x(p)$.

Пусть $x = F(p, C)$ — общее решение уравнения (7.62) (его можно найти, например, методом вариации произвольной постоянной Лагранжа). Тогда общее решение уравнения Лагранжа может быть записано в виде:

$$\begin{cases} x = F(p, c), \\ y = x\varphi(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\dfrac{dp}{dx} = 0$. Тогда уравнение (7.61) принимает вид

$$\varphi(p) = p.$$

Если это алгебраическое уравнение имеет действительные корни x_k, $k = 1, \ldots, n$, то получим следующие особые решения уравнения Лагранжа (7.59):

$$y = x\varphi(p_k) + \psi(p_k), \quad k = 1, \ldots, n,$$

которые являются прямыми.

Дифференциальное уравнение вида

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{7.63}$$

где ψ — заданная функция от y', называется *уравнением Клеро*.

Заметим, что уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа (7.59) при $\varphi(y') \equiv y'$.

Положим $y' = p$. Тогда уравнение (7.63) примет вид

$$y = xp + \psi(p). \tag{7.64}$$

Продифференцировав это уравнение по x, получим

$$y' = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

то есть,

$$[x + \psi'(p)] \cdot \frac{dp}{dx} = 0.$$

Если $\dfrac{dp}{dx} = 0$, то $p = C$, а значит, общим решением уравнения Клеро (7.63) будет

$$y = xC + \psi(C). \tag{7.65}$$

В случае, когда $x + \psi'(p) = 0$, получаем особое решение уравнения Клеро в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = xp + \psi(p) = -\psi'(p)p + \psi(p). \end{cases} \tag{7.66}$$

Пример 7.11.1. Решить уравнение Клеро

$$y = xy' - e^{y'}.$$

Общее решение этого уравнения получается по формуле (7.65):

$$y = Cx - e^{C}.$$

Для нахождения особого решения применим формулу (7.66), которая даст следующее параметрическое представление особого решения:

$$\begin{cases} x = e^{p}, \\ y = e^{p}(p - 1). \end{cases}$$

Исключая C из этой системы, получим особое решение данного уравнения, заданное в явном виде: $y = x(\ln x - 1)$. □

§ 7.12. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Общее решение

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются *дифференциальными уравнениями высших порядков*.

Рассмотрим общий вид дифференциального уравнения n-го порядка:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.67}$$

где x — независимая переменная, $y = y(x)$ — искомая функция, а F — некоторая функция от $n + 2$ переменных.

Уравнение (7.67) часто записывают (если это возможно) в виде, *разрешенном относительно старшей производной* $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{7.68}$$

где f — функция от $n + 1$ переменных.

Понятие решения (интегральной кривой) уравнения (7.67) было введено в определении 7.1.1. Чтобы найти вполне определенную интегральную кривую уравнения (7.68), следует задать дополнительные начальные условия, причем таких условий должно быть n.

Итак, пусть $(x_0, y_0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0)$ — фиксированная начальная точка, принадлежащая области определения $D \in \mathbf{R}^{n+1}$ функции f. Задача отыскания решения $y = y(x)$ уравнения (7.68), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1^0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0, \tag{7.69}$$

называется *задачей Коши* для дифференциального уравнения n-го порядка (7.68).

Следующая теорема дает достаточное условие для разрешимости задачи Коши для уравнения (7.68) с начальными условиями (7.69).

Теорема 7.12.1 (существования и единственности решения задачи Коши). *Пусть функция* $f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ *и ее частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}$, ..., $\dfrac{\partial f}{\partial y_{n-1}}$ *непрерывны в некоторой области* $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$. *Тогда, какова бы ни была начальная точка* $(x_0, y_0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0) \in D$, *существует такой отрезок* $[x_0 - h, x_0 + h]$, $h > 0$, *что задача Коши для уравнения* (7.68) *с начальными условиями* (7.69) *имеет решение на этом отрезке и при том это решение единственно на указанном отрезке.*

Определение 7.12.1. *Общим решением* уравнения (7.68) в области $Q \subset D$ называется функция $y = F(x, C_1, \ldots, C_n)$, содержащая n произвольных постоянных C_1, ..., C_n и удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) при любых допустимых значениях C_1, ..., C_n функция $y = F(x, C_1, \ldots, C_n)$ является решением уравнения (7.68) на некотором отрезке $[a, b]$ (см. определение 7.1.1),

2) какова бы ни была начальная точка $(x_0, y_0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0) \in Q$, существуют такие постоянные $C_1 = C_1^0$, ..., $C_n = C_n^0$, что функция $y = F(x, C_1^0, \ldots, C_n^0)$ является решением задачи Коши для уравнения (7.68) с начальными условиями (7.69).

Определение 7.12.2. *Частным решением* дифференциального уравнения (7.68) называется любое решение вида $y = F(x, C_1^0, \ldots, C_n^0)$, полученное из общего решения $y = F(x, C_1, \ldots, C_n)$ при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0$, ..., $C_n = C_n^0$.

Общее решение уравнения (7.68), заданное неявным образом

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0,$$

называется *общим интегралом* этого уравнения. В этом случае неявно заданная функция $\Phi(x, y, C_1^0, \ldots, C_n^0) = 0$ называется *частным интегралом*.

§ 7.13. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков является *метод понижения порядка*. Суть этого метода заключается в сведении дифференциального уравнения n-го порядка к дифференциальному уравнению более низкого порядка путем введения новой неизвестной функции.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений, к которым можно применить указанный метод. Такие уравнения называются уравнениями, допускающими понижение порядка.

1. Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x), \tag{7.70}$$

где предполагаем, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Общее решение уравнения (7.70) находится путем его последовательного n-кратного интегрирования:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1.$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\,dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int dx \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_{n-1} x + C_n. \tag{7.71}$$

Пример 7.13.1. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' = 2x + e^x.$$

Последовательно интегрируя два раза, получим

$$y' = \int (2x + e^x)\,dx = x^2 + e^x + C_1,$$

$$y = \int (x^2 + e^x + C_1)\,dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C_1 x + C_2. \qquad \square$$

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение, которое не содержит явно искомую функцию y и ее производные до $(k-1)$-го порядка включительно:

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.72}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$.

Порядок такого дифференциального уравнения можно сразу понизить на k единиц, если ввести новую неизвестную функцию, положив

$$y^{(k)}(x) = z(x). \tag{7.73}$$

Тогда $y^{(k+1)} = z'$, $\ldots$, $y^{(n)} = z^{(n-k)}$ и, следовательно, данное уравнение примет вид

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}). \tag{7.74}$$

Итак, исходное уравнение n-го порядка (7.72) с помощью подстановки (7.73) свели к дифференциальному уравнению $(n-k)$-го порядка (7.74) .

Предположим, что $z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$ — общее решение уравнения (7.74). Тогда для нахождения общего решения исходного уравнения (7.72), учитывая подстановку (7.73), получим уравнение

$$y^{(k)}(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}),$$

которое решается методом последовательного интегрирования, описанным выше.

Пример 7.13.2. Решить уравнение

$$y''' = \frac{y''}{x}.$$

Положим $y'' = z$. Тогда данное уравнение примет вид

$$z' = \frac{z}{x}.$$

Последнее уравнение легко интегрируется методом разделения переменных:
$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$
откуда получим $z = C_1 x$.

Возвращаясь к исходной функции, получим $y'' = C_1 x$. Последовательное интегрирование этого уравнения даст следующее общее решение исходного уравнения: $y = Cx^3 + C_2 x + C_3$ $\left(C = \dfrac{C_1}{6}\right)$. □

3. Рассмотрим дифференциального уравнения, не содержащее независимую переменную x:
$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{7.75}$$

Порядок такого дифференциальное уравнение можно понизить, если y считать независимой переменной и ввести новую функцию
$$z(y) = y'.$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, получим
$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(z(y)) = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$
$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}\left(z\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(z\frac{dz}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = z^2\,\frac{d^2 z}{dy^2} + z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2,$$
и т. д. Отсюда видно, что k-я производная функции $y = y(x)$ выражается через функцию $z = z(x)$ и ее производные до $(k-1)$-го порядка. Следовательно, уравнение (7.75) после замены $z(y) = y'$ примет вид
$$F(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0, \tag{7.76}$$
порядок которого на единицу меньше порядка исходного уравнения.

Если $z = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1})$ — общее решение уравнения (7.76), то для нахождения общего решения исходного уравнения (7.75) следует интегрировать уравнение $y' = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1})$.

Пример 7.13.3. Найти решение задачи Коши
$$y'' - y'^{\,2} + y'(y-1) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2. \tag{7.77}$$

Положим $z = z(y) = y'$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(z(y))}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\,\frac{dz}{dy}$$

и, следовательно, данное уравнение примет вид

$$z\,\frac{dz}{dy} - z^2 + z(y-1) = 0,$$

или

$$\frac{dz}{dy} - z + y - 1 = 0,$$

поскольку $z \neq 0$ (ведь $y' \neq 0$ согласно начальному условию). Последнее уравнение является линейным уравнением первого порядка. Решая его (скажем, методом Бернулли), получим общее решение $z = Ce^y + y$.

Произведя обратную подстановку, получим

$$y' = Ce^y + y. \tag{7.78}$$

Подставляя начальные условия в это равенство, получим $2 = Ce^2 + 2$, откуда находим $C = 0$.

Итак, уравнение (7.78) принимает вид $y' = y$. Общим решением этого уравнения является $y = Ce^x$. Но так как $y(0) = 2$, значит, $C = 2$.

Таким образом, функция $y = 2e^x$ является решением задачи Коши (7.77).

§ 7.14. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{7.79}$$

где $p_1(x)$, …, $p_n(x)$, $f(x)$ — функции, определенные на отрезке $[a, b]$, называется *линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*.

Функции $p_1(x)$, …, $p_n(x)$ называются *коэффициентами уравнения* (7.79), а правая часть $f(x)$ — его *свободным членом* или *неоднородностью*.

Если $f(x) \equiv 0$, то дифференциальное уравнение (7.79) называется *однородным*, в противном случае уравнение (7.79) называется *неоднородным*.

Рассмотрим оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x), \tag{7.80}$$

который называется *дифференциальным оператором n-го порядка.*

С помощью этого оператора уравнение (7.79) можно записать кратко:

$$Ly = f(x). \tag{7.81}$$

Поскольку операция дифференцирования линейна, то линеен и оператор L. Иначе говоря, оператор L удовлетворяет следующим двум условиям:

1. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ (*аддитивность*),

2. $L(\lambda y) = \lambda L(y)$ (*однородность*),

где y_1, y_2 — произвольные функции, а λ — произвольная постоянная.

Для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка справедлива следующая теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Теорема 7.14.1. *Пусть функции $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, $f(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$. Тогда задача Коши*

$$\begin{gathered} Ly = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1^0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0, \end{gathered} \tag{7.82}$$

где $x_0 \in [a, b]$, а $(y_0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0) \in \mathbf{R}^n$ — произвольная точка, имеет единственное решение $y = y(x)$, определенное на заданном отрезке $[a, b]$.

Замечание 7.14.1. Последняя теорема имеет глобальный характер в том смысле, что решение (единственное) задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка существует не в некоторой окрестности точки $x_0 \in [a, b]$, а на всем отрезке $[a, b]$.

§ 7.15. Линейная зависимость и линейная независимость системы функций. Определитель Вронского

Понятия линейной зависимости и линейной независимости системы функций вводятся по аналогии с соответствующими понятиями для системы векторов.

Определение 7.15.1. Система функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ называется *линейно зависимой* на отрезке $[a, b]$, если существуют постоянные α_1, ..., α_n, не все равные нулю одновременно, такие, что справедливо тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \quad (x \in [a, b]). \tag{7.83}$$

Если же тождество (7.83) выполняется лишь в случае, когда все числа α_i, $i = 1, \ldots, n$, равны нулю, то система функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ называется *линейно независимой* на отрезке $[a, b]$.

Выражение $\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$ называется *линейной комбинацией функций* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Если система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависима (независима), то тогда говорят также, что *функции* $y_1(x), \ldots,$ $y_n(x)$ *линейно зависимы* (*независимы*).

Нетрудно доказать, что *система функций* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *линейно зависима на отрезке* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда одна из этих функций является линейной комбинацией других функций*. Это утверждение доказывается так же, как и соответствующее утверждение для системы векторов.

Пример 7.15.1. Доказать линейную зависимость функций

$$\sin^2 x, \quad \cos^2 x, \quad 1 \tag{7.84}$$

на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$.

Заметим, что если взять $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_3 = -1$, то

$$\alpha_1 \sin^2 x + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \cdot 1 = \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. А это значит, что система функций (7.84) линейно зависима на интервале $(-\infty, +\infty)$. □

Пример 7.15.2. Доказать линейную независимость функций

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^n \tag{7.85}$$

на любом отрезке $[a, b]$.

Составим линейную комбинацию функций (7.85) с произвольными коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, из которых хотя бы один не равен нулю, и рассмотрим равенство:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0. \tag{7.86}$$

Это равенство не может выполняться для всех $x \in [a, b]$, поскольку слева стоит многочлен, который не может иметь бесчисленное множество корней. Следовательно, равенство (7.86) для всех $x \in \in [a, b]$ выполняется лишь в случае, когда все числа α_i, $i = = 0, \ldots, n$, равны нулю. А это значит, что функции (7.85) линейно независимы на отрезке $[a, b]$. □

Эффективным средством установления линейной зависимости (или независимости) системы функций является так называемый определитель Вронского или вронскиан.

Определение 7.15.2. *Определителем Вронского* (или просто *вронскианом*) функций $y_1(x)$, …, $y_n(x)$, имеющих производные до $(n-1)$-го порядка включительно на отрезке $[a, b]$, называется определитель

$$W(x) \equiv W[y_1, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{7.87}$$

Теорема 7.15.1. *Если функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависимы и имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского этих функций тождественно равен нулю на $[a, b]$, то есть $W(x) = 0$ для всех $x \in [a, b]$.*

Доказательство. Пусть функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$. Тогда существуют такие числа α_1, …, α_n, не все равные нулю одновременно, что справедливо тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \quad (x \in [a, b]).$$

Дифференцируя это тождество $(n-1)$ раз, получим однородную систему

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) + \ldots + \alpha_n y_n'(x) \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0, \end{cases}$$

которая, в силу предположения, имеет нетривиальное решение α_1, …, α_n, для произвольного $x \in [a, b]$. А это возможно, когда определитель этой системы, являющийся определителем Вронского функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, равен нулю для всех $x \in [a,b]$.

Теорема доказана. □

Следствие 7.15.1. *Если определитель Вронского функций $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ не равен нулю хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$: $W(x_0) \neq 0$,: то эти функции линейно независимы на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. В самом деле, если бы функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ были линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то, в силу предыдущей теоремы, $W(x)$ тождественно обращался бы в нуль на этом отрезке. Откуда, в частности, следовало бы равенство $W(x_0) = 0$, что противоречит предположению. □

Пример 7.15.3. Доказать, что если λ_1, ..., λ_n — различные числа, то функции

$$e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_n x} \tag{7.88}$$

линейно независимы на любом отрезке $[a,b]$.

Составим определитель Вронского функций (7.88):

$$W[e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} \times \ldots \times e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель есть так называемый *определитель Вандермонда*, он равен произведению всех двучленов $(\lambda_i - \lambda_j)$, для которых $j < i$:

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

(можно доказать методом математической индукции). Этот определитель отличен от нуля, так как по предположению все числа λ_1, ..., λ_n попарно различны.

Итак,

$$W[e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}] = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)x} \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0,$$

откуда и следует, что функции (7.88) линейно независимы на любом отрезке $[a, b]$. □

П р и м е р 7.15.4. Доказать, что если λ — действительное число, а $r \geqslant 1$ — натуральное число, то функции

$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad x^{r-1}e^{\lambda x}, \tag{7.89}$$

линейно независимы на любом отрезке $[a, b]$.

Составим линейную комбинацию данных функций с произвольными коэффициентами α_1, ..., α_r:

$$\alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} + \ldots + \alpha_r x^{r-1} e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_r x^{r-1}).$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, а выражение в скобках является многочленом, то

$$\alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} + \ldots + \alpha_r x^{r-1} e^{\lambda x} \equiv 0$$

тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$. А это и значит, что функции (7.89) линейно независимы на любом отрезке $[a, b]$.

§ 7.16. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{7.90}$$

Т е о р е м а 7.16.1. *Если функции* $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ *являются решениями однородного уравнения* (7.90), *то их линейная комбинация* $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) = \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$, *где* α_1, ..., α_n — *произвольные постоянные*, *также является решением этого уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (7.90) представим в виде $Ly = 0$, где L — линейный дифференциальный оператор (7.80).

Теперь предположим, что $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ являются решениями однородного уравнения (7.90), то есть $L(y_i(x)) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. В силу линейности оператора L имеем

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(y_i(x)) = 0.$$

А это значит, что функция $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$ является решением уравнения (7.90).

Теорема доказана. □

Т е о р е м а 7.16.2. *Пусть функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ являются решениями однородного уравнения* (7.90) *с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами $p_1(x)$, …, $p_n(x)$. Тогда $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно независимы на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда определитель Вронского этих функций не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a,b]$, то есть $W(x) \equiv \equiv W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$ для всех $x \in [a,b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $W(x) \equiv \equiv W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$ для всех $x \in [a,b]$. Тогда функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно независимы на отрезке $[a,b]$ независимо от того, являются они решениями уравнения (7.90) или нет (см. следствие 7.15.1).

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть решения $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно независимы на отрезке $[a,b]$. Докажем, что тогда $W(x) \equiv \equiv W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$ для всех $x \in [a,b]$. Предположим противное, т. е. что существует такая точка $x_0 \in [a,b]$, в которой $W(x)$ обращается в нуль:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого следует, что однородная система

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{7.91}$$

имеет нетривиальное решение α_1^0, …, α_n^0.

Теперь рассмотрим функцию $\varphi(x) = \alpha_1^0 y_1(x) + \ldots + \alpha_n^0 y_n(x)$. Эта функция является решением уравнения (7.90), так как функции $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, сами являются решениями этого уравнения (см. теорему 7.16.1). Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям в силу (7.91):

$$\varphi(x_0) = 0, \quad \varphi'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Однако таким же начальным условиям удовлетворяет и тривиальное решение $y \equiv 0$ уравнения (7.90). В силу теоремы существования и единственности 7.14.1 функции $y = \varphi(x)$ и $y \equiv 0$ совпадают на отрезке $[a, b]$, то есть

$$\alpha_1^0 y_1(x) + \ldots + \alpha_n^0 y_n(x) \equiv 0 \quad (x \in [a, b])\,,$$

где не все числа α_1^0, …, α_n^0 равны нулю. А это значит, что функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$.

Полученное противоречие показывает, что определитель Вронского $W(x) \equiv W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Теорема полностью доказана. □

О п р е д е л е н и е 7.16.1. Система из n линейно независимых на отрезке $[a, b]$ решений $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (7.90) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Возникает естественный вопрос, всегда ли существует фундаментальная система решений для заданного однородного уравнения (7.90)? Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Т е о р е м а 7.16.3. *Если в уравнении* (7.90) *все коэффициенты* $p_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, *непрерывны на отрезке* $[a, b]$, *то для этого уравнения существует фундаментальная система решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0 \in [a, b]$. Рассмотрим решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ уравнения (7.90), которые соответственно удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\begin{gathered}
y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\
y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1, \quad \ldots, \quad y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\
\ldots, \\
y_n(x_0) = 0, \quad y_n'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = 1
\end{gathered}$$

(существование этих решений следует из теоремы 7.82).

Определитель Вронского $W(x)$ этих функций в точке x_0, очевидно, есть определитель единичной матрицы, который равен 1:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Значит, решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$ (см. следствие 7.15.1), т. е. являются фундаментальной системой решений для уравнения (7.90).

Теорема доказана. □

Теорема 7.16.4 (о структуре общего решения линейного однородного уравнения). *Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ — фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка* (7.90) *с непрерывными коэффициентами $p_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, на отрезке $[a, b]$, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x), \tag{7.92}$$

где C_1, …, C_n — произвольные постоянные.

Доказательство. То, что функция $y(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ является решением уравнения (7.90) следует из теоремы 7.16.1.

Теперь докажем, что любое решение уравнения (7.90) можно представить в виде (7.92). То есть, что для любой задачи Коши уравнения (7.90) с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1^0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0 \tag{7.93}$$

существуют такие постоянные C_1^0, …, C_n^0, что функция $y = C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x)$ является решением именно этой задачи Коши. Для этого потребуем, чтобы функция $y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ удовлетворяла начальным условиям (7.93). Тогда получим систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) & + \ldots + C_n y_n(x_0) & = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) & + \ldots + C_n y_n'(x_0) & = y_1^0, \\ \cdots\cdots\cdots & \ldots \ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = y_{n-1}^0. \end{cases}$$

Так как решения $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$, то в силу теоремы 7.16.2 их определитель Вронского $W(x)$

не равен нулю ни в одной точке этого отрезка, в частности, $W(x_0) \neq 0$. Но поскольку $W(x_0)$ совпадает с определителем последней системы, то, значит, эта система имеет единственное решение $C_1^0, \ldots, C_n^0$.

Итак, функция $y = C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x)$ является решением задачи Коши для уравнения (7.90) с начальными условиями (7.93).

Теорема доказана. □

Из последней теоремы следует, что отыскание общего решения линейного однородного дифференциального уравнения сводится к нахождению его фундаментальной системы решений.

§ 7.17. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x). \quad (7.94)$$

Теорема 7.17.1 (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). *Пусть коэффициенты* $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ *и правая часть* $f(x)$ *неоднородного уравнения* (7.94) *непрерывны на отрезке* $[a, b]$. *Тогда общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + y_*(x), \quad (7.95)$$

где $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *— фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения* $Ly = 0$, $y_*(x)$ *— частное решение неоднородного уравнения* (7.94), *а* $C_1, \ldots, C_n$ *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Сначала заметим, что функция (7.95) является решением уравнения (7.94). Действительно, в силу линейности оператора L имеем

$$Ly = L(C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + y_*(x)) = \\ = C_1 L(y_1(x)) + \ldots + C_n L(y_n(x)) + L(y_*(x)) = \\ = 0 + \ldots + 0 + f(x) = f(x).$$

Теперь докажем, что любое решение уравнения (7.94) можно представить в виде (7.95); иначе говоря, решение любой задачи Коши для уравнения (7.94) с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1^0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0 \tag{7.96}$$

можно получить из (7.95) при определенных значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$. Для этого потребуем, чтобы функция $y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + y_*(x)$ удовлетворяла начальным условиям (7.96). Тогда получим систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) & + \ldots + C_n y_n(x_0) & = y_0 - y_*(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) & + \ldots + C_n y_n'(x_0) & = y_1^0 - y_*'(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = y_{n-1}^0 - y_*^{(n-1)}(x_0). \end{cases}$$

Определитель этой системы совпадает с определителем Вронского $W(x) \equiv W[y_1, \ldots, y_n]$ в точке $x_0 \in [a, b]$, который отличен от нуля, поскольку решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$ (см. теорему 7.16.2). Значит, эта система имеет единственное решение $C_1^0, \ldots, C_n^0$.

Следовательно, функция $y = C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x) + y_*(x)$ является решением задачи Коши для уравнения (7.94) с начальными условиями (7.96).

Теорема доказана. □

Таким образом, в соответствии с доказанной теоремой для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и каким-то образом отыскать одно частное решение неоднородного уравнения. Нахождение общего решения соответствующего однородного уравнения в общем случае является трудной задачей. Однако если уже найдена фундаментальная система решений однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения всегда можно найти *методом вариации произвольных постоянных Лагранжа*, которому и посвящен следующий параграф.

§ 7.18. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа

Теорема 7.18.1. *Пусть коэффициенты $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и правая часть $f(x)$ неоднородного уравнения* (7.94) *непрерывны на отрезке $[a, b]$. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения*

$Ly = 0$, *то частное решение неоднородного уравнения* (7.94) *имеет вид*

$$y_*(x) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x), \tag{7.97}$$

где функции $C_1(x)$, …, $C_n(x)$ *находятся из системы*

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) & + \ldots + C_n'(x)y_n(x) & = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) & + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = f(x). \end{cases} \tag{7.98}$$

Доказательство. Сначала заметим, что система (7.98) имеет единственное решение

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad \ldots, \quad C_n'(x) = \varphi_n(x), \tag{7.99}$$

так как определитель этой системы есть определитель Вронского $W[y_1, \ldots, y_n]$, который отличен от нуля в силу теоремы 7.16.2. Интегрируя равенства (7.99), находим требуемые для нахождения частного решения (7.97) функции $C_1(x)$, …, $C_n(x)$.

Теперь осталось проверить, что функция (7.97) является частным решением неоднородного уравнения (7.94). Эту проверку произведем для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \tag{7.100}$$

В этом случае система (7.98) примет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{7.101}$$

Проверим, что функция $y_*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, а $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — удовлетворяют системе (7.101), является частным решением уравнения (7.100).

Учитывая систему (7.101) вычислим производные y_*' и y_*'':

$$y_*' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) =$$
$$= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x),$$

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) =$$
$$= C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + f(x).$$

Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения соответствующего однородного уравнения, то, применяя последние равенства, получим

$$y_*'' + p_1(x)y_*' + p_2(x)y_* =$$
$$= C_1y_1'' + C_2y_2'' + f(x) + p_1(C_1y_1' + C_2y_2') + p_2(C_1y_1 + C_2y_2) =$$
$$= C_1(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1) + C_2(y_2'' + p_1y_2' + p_2y_2) + f(x) = f(x).$$

А это значит, что $y_* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ — частное решение уравнения (7.100).

Теорема доказана. □

Описанный в последней теореме метод отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения называется *методом вариации произвольных постоянных Лагранжа*.

§ 7.19. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_ny = 0, \tag{7.102}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — произвольные постоянные, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Алгебраическое уравнение n-го порядка

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0, \tag{7.103}$$

полученное из (7.102) заменой производных $y^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, степенями λ^k, называется *характеристическим уравнением*, а многочлен

$$Q(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n \tag{7.104}$$

называется *характеристическим многочленом* дифференциального уравнения (7.102).

Заметим, что справедливо тождество

$$L(e^{\lambda x}) \equiv e^{\lambda x}Q(\lambda). \tag{7.105}$$

В самом деле, поскольку $(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$, $k = 1, 2, \ldots$, то

$$L(e^{\lambda x}) \equiv \lambda^n e^{\lambda x} + p_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + p_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + p_n e^{\lambda x} =$$

$$= e^{\lambda x}(\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n) = e^{\lambda x} Q(\lambda).$$

Нахождение общего решения дифференциального уравнения (7.102) тесно связано с корнями алгебраического уравнения n-го порядка (7.103).

Теорема 7.19.1. *Функция $y = e^{\lambda x}$ является решением уравнения* (7.102) *тогда и только тогда, когда число λ есть корень характеристического уравнения* (7.103).

Доказательство. Так как $L(e^{\lambda x}) \equiv e^{\lambda x} Q(\lambda) = 0$ (см. тождество (7.105)), то равенство $L(e^{\lambda x}) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется равенство $e^{\lambda x} Q(\lambda) = 0$ или $Q(\lambda) = 0$ (ведь $e^{\lambda x} \neq 0$), т. е. λ есть корень характеристического уравнения (7.103).

Теорема доказана. □

Как известно, уравнение (7.103) имеет n корней с учетом кратностей. Рассмотрим отдельно случаи простых и кратных корней.

1°. *Случай простых корней.*

Теорема 7.19.2. *Если все корни уравнения* (7.103) λ_1, λ_2, … , λ_n *различны, т. е. — простые, то функции*

$$e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_n x} \tag{7.106}$$

образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (7.102), *а функция*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}, \tag{7.107}$$

где C_1, C_2, …, C_n — произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2, … , λ_n — простые корни характеристического уравнения (7.103). То, что функции (7.106) являются решениями уравнения (7.102), следует из теоремы 7.19.1. Линейная независимость этих функций была установлена в примере 7.15.3.

Итак, функции (7.106) образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (7.102). А значит, в силу теоремы 7.16.4 функция (7.107) является общим решением этого уравнения.

Теорема доказана. □

П р и м е р 7.19.1. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, функция $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ является общим решением данного дифференциального уравнения. □

З а м е ч а н и е 7.19.1. Общее решение уравнения (7.102) можно записать в действительной форме даже в случае, когда среди простых корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения (7.103) есть комплексно-сопряженные корни: $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$. В самом деле, так как комплексные функции $e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $e^{(\alpha-i\beta)x}$ являются решениями уравнения (7.102), то, согласно теореме 7.16.1, функции

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{1}{2}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}\right], \tag{7.108}$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{1}{2}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right] \tag{7.109}$$

также будут решениями уравнения (7.102). Теперь в общем решении (7.107) комплексные решения $e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $e^{(\alpha-i\beta)x}$ можно заменить действительными решениями (7.108) и (7.109).

П р и м е р 7.19.2. Решить дифференциальное уравнение

$$y''' - y'' + y' - y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Следовательно, общим решением данного дифференциального уравнения будет $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

2°. *Случай кратных корней.*

Т е о р е м а 7.19.3. *Если* $\lambda = \lambda_0$ — *корень кратности* r *характеристического уравнения* (7.103), *то функции*

$$e^{\lambda_0 x}, \quad x e^{\lambda_0 x}, \quad \ldots, \quad x^{r-1} e^{\lambda_0 x}$$

будут линейно независимыми на любом отрезке $[a, b]$ *решениями уравнения* (7.102).

Доказательство. Линейная независимость указанных функций установлена в примере 7.15.4. Докажем, что эти функции являются решениями уравнения (7.102), т. е. что

$$L(x^k e^{\lambda_0 x}) \equiv L(x^k e^{\lambda x})\Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0$$

для всех $k = 1, \ldots, r-1$.

Так как $\lambda = \lambda_0$ — корень кратности r характеристического многочлена $Q(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n$, то этот многочлен можно представить в виде

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r R(\lambda), \tag{7.110}$$

где $R(\lambda)$ — некоторый многочлен степени $n-r$, причем $R(\lambda_0) \neq \neq 0$.

Поскольку

$$x^k e^{\lambda x} = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\, e^{\lambda x},$$

то, учитывая тождество (7.105) и перестановочность операторов $\dfrac{\partial^k}{\partial\lambda^k}$ и L при применении их к бесконечно дифференцируемой по x и λ функции $e^{\lambda x}$, получим

$$\begin{aligned} L(x^k e^{\lambda x}) &= L\left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\, e^{\lambda x}\right) = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\, L(e^{\lambda x}) = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\, (e^{\lambda x} Q(\lambda)) = \\ &= \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\, (e^{\lambda x}(\lambda-\lambda_0)^r R(\lambda)) = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\, ((\lambda-\lambda_0)^r G(x,\lambda)), \end{aligned} \tag{7.111}$$

где $G(x,\lambda) \equiv e^{\lambda x} R(\lambda)$. Теперь вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda}\, ((\lambda-\lambda_0)^r G(x,\lambda)) &= r(\lambda-\lambda_0)^{r-1} G(x,\lambda) + \\ &+ (\lambda-\lambda_0)^r \frac{\partial}{\partial\lambda}\, G(x,\lambda) \equiv (\lambda-\lambda_0)^{r-1} G_1(x,\lambda), \end{aligned}$$

где

$$G_1(x,\lambda) \equiv rG(x,\lambda) + (\lambda-\lambda_0)\frac{\partial}{\partial\lambda}\, G(x,\lambda).$$

Точно так же имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\, ((\lambda-\lambda_0)^r G(x,\lambda)) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\, ((\lambda-\lambda_0)^{r-1} G_1(x,\lambda)) \equiv \\ &\equiv (\lambda-\lambda_0)^{r-2} G_2(x,\lambda). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, для k-й частной производной окончательно получим

$$\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left((\lambda-\lambda_0)^r G(x,\lambda)\right) = (\lambda-\lambda_0)^{r-k} G_k(x,\lambda),$$

где $k < r$.

Итак, равенство (7.111) можно переписать в виде

$$L(x^k e^{\lambda x}) = (\lambda-\lambda_0)^{r-k} G_k(x,\lambda).$$

Отсюда имеем

$$L(x^k e^{\lambda_0 x}) \equiv L(x^k e^{\lambda x})\Big|_{\lambda=\lambda_0} = (\lambda-\lambda_0)^{r-k} G_k(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0,$$

для всех $k = 1, \ldots, r-1$.

Теорема доказана. □

Следующая теорема непосредственно следует из теорем 7.16.4 и 7.19.3.

Т е о р е м а 7.19.4. *Пусть* λ_i, $i = 1, \ldots, k$, — *корень кратности* $r_i \geqslant 1$ *характеристического уравнения* (7.103) ($r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$). *Тогда функции*

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{r_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & x e^{\lambda_2 x}, & \ldots, & x^{r_2-1} e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{\lambda_k x}, & x e^{\lambda_k x}, & \ldots, & x^{r_k-1} e^{\lambda_k x} \end{array}$$

являются фундаментальной системой решений дифференциального уравнения (7.102), *а их линейная комбинация*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_n x^{r_k-1} e^{\lambda_k x},$$

где C_1, C_2, ..., C_n — *произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.*

П р и м е р 7.19.3. Решить дифференциальное уравнение

$$y''' - 3y' + 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0$ имеет простой корень $\lambda_1 = -2$ и двукратный корень $\lambda_2 = 1$. Следовательно, функция $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 x e^x$ является общим решением данного дифференциального уравнения. □

Замечание 7.19.2. Каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности r характеристического уравнения (7.103) соответствуют r пар линейно независимых действительных решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots, \quad x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots, \quad x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

уравнения (7.102). Следовательно, общее решение уравнения (7.102) можно записать в действительной форме и в случае комплексных кратных корней характеристического уравнения (7.103) (см. замечание 7.19.1).

Пример 7.19.4. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = 0$ имеет два комплексно-сопряженных корня $\pm i$ кратности 2. Следовательно, фундаментальная система решений этого уравнения имеет вид $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x\sin x$, а значит, функция $y = C_1\cos x + C_2 x\cos x + C_3\sin x + C_4 x\sin x = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$ является общим решением данного дифференциального уравнения. □

§ 7.20. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = f(x), \qquad (7.112)$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — произвольные постоянные, а $f(x) \not\equiv 0$, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Согласно теореме 7.17.1 общее решение неоднородного уравнения (7.112) вычисляется по формуле

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) + y_*(x), \qquad (7.113)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения $Ly = 0$; C_1, …, C_n — произвольные постоянные, а $y_*(x)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (7.112).

В § 7.18 был изложен универсальный метод нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами, называемый методом вариации произвольных постоянных Лагранжа.

В случае линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (7.112) со специальной правой частью $f(x)$ существует более простой метод нахождение частного решения, который называется *методом подбора*. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1°. Пусть правая часть уравнения (7.112) имеет вид

$$f(x) = ae^{\lambda_0 x}, \tag{7.114}$$

где число λ_0 не является корнем характеристического уравнения

$$Q(\lambda) \equiv \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \tag{7.115}$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = ae^{\lambda_0 x} \tag{7.116}$$

можно искать в виде

$$y_*(x) = Ae^{\lambda_0 x}, \tag{7.117}$$

где A — постоянная. Действительно, подставив эту функцию в уравнение (7.116), получим

$$AQ(\lambda_0)e^{\lambda_0 x} = ae^{\lambda_0 x}.$$

Откуда находим $A = \dfrac{a}{Q(\lambda_0)}$ (ведь $Q(\lambda_0) \neq 0$!).

Пример 7.20.1. Решить уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^x.$$

Характеристическое уравнение $Q(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, функции e^{2x} и e^{3x} являются фундаментальной системой решений соответствующего однородного уравнения (см. теорему 7.19.2).

Так как число $\lambda_0 = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения имеет вид $y_*(x) = Ae^x$, где $A = \dfrac{a}{Q(\lambda_0)} = \dfrac{2}{2} = 1$. То есть, $y_*(x) = e^x$.

Итак,

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + e^x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные есть общее решение исходного уравнения. □

Замечание 7.20.1. В случае, когда λ_0 есть корень характеристического уравнения (7.115), то есть $Q(\lambda_0) = 0$, то частное решение неоднородного уравнения (7.116) нельзя искать в виде (7.117). В этом случае справедливо утверждение: *если λ_0 — корень кратности r характеристического уравнения* (7.115), *то частное решение неоднородного уравнения* (7.116) *следует искать в виде*

$$y_*(x) = Ax^r e^{\lambda_0 x}, \tag{7.118}$$

где A — некоторая постоянная.

Пример 7.20.2. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$$

Характеристическое уравнение $Q(\lambda)=\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0$ имеет корень $\lambda = 2$ кратности 2. Следовательно, функции e^{2x} и xe^{2x} являются фундаментальной системой решений соответствующего однородного уравнения (см. теорему 7.19.3).

В силу последнего замечания частное решение данного неоднородного уравнения следует искать в виде $y_*(x) = Ax^2e^{2x}$. Имеем

$$y'_*(x) = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}, \quad y''_*(x) = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}.$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение и упрощая его, получим $2Ae^{2x} = e^{2x}$, откуда имеем $A = \frac{1}{2}$, то есть $y_*(x) = \frac{1}{2}\,x^2e^{2x}$ есть искомое частное решение.

Итак,

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{2}\,x^2e^{2x} = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}\,x^2e^{2x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, есть общее решение исходного уравнения. □

Случай 2°. Пусть правая часть уравнения (7.112) имеет вид

$$f(x) = P_n(x)\,e^{\lambda_0 x}, \tag{7.119}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, а λ_0 — некоторое число. Тогда частное решение неоднородного уравнения (7.112) имеет вид

$$y_*(x) = x^r Q_n(x)\,e^{\lambda_0 x}, \tag{7.120}$$

где $Q_n(x)$ — некоторый многочлен той же степени n, а r — число, равное кратности λ_0 как корня характеристического уравнения (7.115) (если λ_0 не является корнем характеристического уравнения, то принимается $r = 0$).

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена $Q_n(x)$ следует функцию (7.120) подставить в уравнение (7.112) и в полученном тождестве приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества.

Пример 7.20.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 3.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, а значит, функции e^x и e^{2x} образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения (см. теорему 7.19.3).

Так как правая часть имеет вид $2x + 3 = (2x + 3)e^{0\cdot x}$, причем $\lambda_0 = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение исходного неоднородного уравнения следует искать в виде $y_* = Ax + B$. Подставляя эту функцию в данное уравнение, получим $2Ax + 2B - 3A = 2x + 3$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ 2B - 3A = 3. \end{cases}$$

Откуда получаем $A = 1$, $B = 3$. Следовательно, $y_* = 2x + 3$ есть частное решение, а $y = C_1 e^x + C_2 e_{2x} + 2x + 3$ — общее решение исходного неоднородного уравнения. □

Заметим, что *случай* 1 является частным случаем *случая* 2.

Случай 3°. Пусть правая часть уравнения (7.112) имеет вид

$$f(x) = (P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}, \tag{7.121}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — некоторые многочлены, а α и β — некоторые числа. Тогда частное решение неоднородного уравнения (7.112) имеет вид

$$y_*(x) = x^r(M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}, \tag{7.122}$$

где $M_l(x)$ и $N_l(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами степени $l = \max(n, m)$, а r — число, равное кратности $\alpha + i\beta$ как корня характеристического уравнения (7.115) (если

$\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то принимается $r = 0$).

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочленов $M_l(x)$ и $N_l(x)$ следует функцию (7.122) подставить в уравнение (7.112) и в полученном тождестве приравнять многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями левой и правой частях тождества.

Пример 7.20.4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 4\sin 2x.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_2 = -2i$. Следовательно, функции $\cos 2x$ и $\sin 2x$ составляют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения (см. замечание 7.19.1).

Так как правая часть данного уравнения имеет вид $f(x) = (0 \cdot \cos 2x + 4\sin 2x)e^{0 \cdot x}$ и $\alpha + i\beta = 0 + 2i = 2i$ является корнем (кратности 1) характеристического уравнения, то частное решение этого уравнения следует искать в виде

$$y_* = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} y'_* &= \quad A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x), \\ y''_* &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \\ &\qquad + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) = \\ &= \quad 4B\cos 2x - 4A\sin 2x - 4x(A\cos 2x + B\sin 2x). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение, получим

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x -$$
$$- 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = \sin 2x,$$

или

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \sin 2x.$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} 4B = 0, \\ -4A = 4, \end{cases}$$

т. е. $A = -1$, $B = 0$. Следовательно, $y_* = -x\cos 2x$ есть частное решение, а $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - x\cos 2x$ — общее решение исходного неоднородного уравнения. □

Следующая теорема позволяет найти частное решение неоднородного уравнения (7.112) в случае, когда его правая часть есть линейная комбинация функций вида (7.114), (7.119) и (7.121).

Теорема 7.20.1. *Если правая часть неоднородного уравнения*

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = f(x) \qquad (7.123)$$

является линейной комбинацией непрерывных на отрезке $[a, b]$ *функций* $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$:

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x),$$

то линейная комбинация

$$y_*(x) = \alpha_1 y_{1*}(x) + \alpha_2 y_{2*}(x) + \ldots + \alpha_n y_{n*}(x),$$

где $y_{k*}(x)$, $k = 1, \ldots n$, *— частное решение неоднородного уравнения*

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = f_k(x) \qquad (7.124)$$

является частным решением уравнения (7.123).

Доказательство. Действительно, в силу линейности оператора L имеем

$$\begin{aligned} Ly_* &= L(\alpha_1 y_{1*}(x) + \alpha_2 y_{2*}(x) + \ldots + \alpha_n y_{n*}(x)) = \\ &= \alpha_1 Ly_{1*}(x) + \alpha_2 Ly_{2*}(x) + \ldots + \alpha_n Ly_{n*}(x) = \\ &= \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) = f(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Глава 8

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 8.1. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность двух или более дифференциальных уравнений.

Общий вид системы n дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями y_1, …, y_n следующий:

$$\begin{cases} F_1(t, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(t, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \end{cases} \tag{8.1}$$

где t — независимая переменная.

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно всех производных y_1', …, y_n', т. е. система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{8.2}$$

называется *нормальной системой дифференциальных уравнений*. Эту систему в *векторной форме* можно записать в следующем кратком виде:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \tag{8.3}$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, а $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = (f_1(t, \mathbf{y}), \ldots, f_n(t, \mathbf{y}))$.

В дальнейшем мы будем рассматривать нормальные системы дифференциальных уравнений. Это объясняется тем, что во многих случаях системы уравнений и уравнения высших порядков можно привести к нормальной системе вида (8.2). Например, система двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = f_1(t, y_1, y_2, y_1', y_2'), \\[2ex] \dfrac{d^2y_2}{dt^2} = f_2(t, y_1, y_2, y_1', y_2') \end{cases}$$

путем введения новых переменных $y_3 = \dfrac{dy_1}{dt}$ и $y_4 = \dfrac{dy_2}{dt}$ приводится к нормальной системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_3, \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dt} = y_4, \\[2ex] \dfrac{dy_3}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, y_3, y_4), \\[2ex] \dfrac{dy_4}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, y_3, y_4). \end{cases}$$

Областью определения системы (8.2) называется множество D всех точек $(t, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$, для которых все функции $f_k(t, y_1, \ldots, y_n)$, $k = 1, \ldots, n$, имеют смысл.

Решением системы (8.2) на отрезке $[a, b]$ называется совокупность n функций $y_1(t)$, …, $y_n(t)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ и обращающих каждое из уравнений этой системы в тождество относительно $t \in [a, b]$.

Пусть $y_1(t)$, …, $y_n(t)$ — решение системы (8.2) на отрезке $[a, b]$. Тогда множество всех точек $(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \in \mathbf{R}^{n+1}$, где t пробегает отрезок $[a, b]$, называется *интегральной кривой системы* (8.2).

Пространство $\mathbf{R}^n$ переменных y_1, …, y_n называется *фазовым пространством*, а проекция интегральной кривой в фазовое пространство называется *фазовой траекторией* системы (8.2).

Решение системы (8.2) определяется неоднозначно. Для того чтобы выделить вполне конкретное решение этой системы, необходимо задать дополнительные условия.

Задача, состоящая в нахождении решения $y_1(t)$, …, $y_n(t)$ системы (8.2), удовлетворяющая *начальным условиям*

$$y_1(t_0) = y_1^0, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = y_n^0, \tag{8.4}$$

где $(t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ — заданная *начальная точка* области определения системы (8.2), называется *задачей Коши* или *начальной задачей* для системы (8.2).

Справедлива следующая теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы (8.2).

Теорема 8.1.1 (Коши). *Пусть в системе* (8.2) *все функции* $f_k(t, y_1, \ldots, y_n)$, $k = 1, \ldots, n$, *и их частные производные по всем переменным* y_1, …, y_n *непрерывны в некоторой области* $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$. *Тогда, какова бы ни была начальная точка* $(t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$, *существует отрезок* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *такой, что задача Коши для системы* (8.2) *с начальными условиями* (8.4) *имеет решение на этом отрезке, причем это решение единственно.*

Совокупность функций

$$y_1(t, C_1, \ldots, C_n), \quad \ldots, \quad y_n(t, C_1, \ldots, C_n),$$

зависящих от n произвольных постоянных C_1, …, C_n, называется *общим решением* системы (8.2), если

1) эти функции являются решением системы (8.2) для произвольных допустимых значениях постоянных C_1, …, C_n и

2) для произвольной начальной точки $(t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$ существуют такие значения постоянных $C_1 = C_1^0$, …, $C_n = C_n^0$, что функции $y_1(t, C_1^0, \ldots, C_n^0)$, … , $y_n(t, C_1^0, \ldots, C_n^0)$ являются решением задачи Коши для системы (8.2) с начальной точкой $(t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$.

Второе условие означает, что алгебраическая система уравнений

$$\begin{cases} y_1(t_0, C_1, \ldots, C_n) = y_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(t_0, C_1, \ldots, C_n) = y_n^0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $C_1 = C_1^0$, …, $C_n = C_n^0$.

Решение, которое получается при конкретных значениях постоянных C_1, …, C_n, называется *частным решением* системы (8.2).

§ 8.2. Интегрирование нормальных систем дифференциальных уравнений

Для интегрирования нормальных систем дифференциальных уравнений часто применяют метод сведения системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка. Суть этого метода покажем на конкретном примере.

Пример 8.2.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 4y_1 - 3y_2, \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_1 - 3y_2. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение и учитывая второе, получим: $y_1'' = 4y_1' - 3y_2' = 4y_1' - 3(2y_1 - 3y_2) = 4y_1' - 6y_1 + 9y_2$, откуда имеем уравнение

$$y_1'' - 4y_1' + 6y_1 = 9y_2. \tag{8.5}$$

Теперь из первого уравнения данной системы функцию y_2 выразим через y_1 и y_1':

$$y_2 = \frac{4y_1 - y_1'}{3}. \tag{8.6}$$

Подставив это значения в (8.5), получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y_1'' - y_1' - 6y_1 = 0. \tag{8.7}$$

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, получим $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, $y_1 = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$ — общее решение уравнения (8.7). Подставляя значения y_1 и $y_1' = -2C_1e^{-2x} + 3C_2e^{3x}$ в (8.6), получим $y_2 = 2C_1e^{-2x} + \dfrac{1}{3}\,C_2e^{3x}$.

Итак, $y_1 = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$, $y_2 = 2C_1e^{-2x} + \dfrac{1}{3}\,C_2e^{3x}$ — общее решение исходной системы. □

Опишем еще один метод интегрирования нормальных систем дифференциальных уравнений — так называемый *метод интегрируемых комбинаций*. Суть этого метода заключается в том, чтобы посредством арифметических операций из уравнений данной системы получить легко интегрируемые уравнения относительно новых неизвестных функций, которые называются *интегрируемыми комбинациями*.

Проиллюстрируем этот метод на конкретном примере.

Пример 8.2.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$$

Складывая оба уравнения данной системы, получаем интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y.$$

Это — уравнение относительно $x + y$; оно интегрируется просто: $\dfrac{d(x+y)}{x+y} = dt$, откуда и получаем

$$x + y = C_1 e^t.$$

Вычитая из первого уравнения данной системы ее второе уравнение, получим еще одну интегрируемую комбинацию:

$$\frac{d(x-y)}{dt} = y - x - 2,$$

которая также интегрируется просто: $\dfrac{d(x-y+2)}{x-y+2} = -dt$, откуда имеем $x - y + 2 = C_2 e^{-t}$, или

$$x - y = C_2 e^{-t} - 2.$$

Итак, мы получили два уравнения

$$\begin{cases} x + y = C_1 e^t, \\ x - y = C_2 e^{-t} - 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, окончательно получаем общее решение исходной системы дифференциальных уравнений:

$$x = \frac{1}{2} C_1 e^t + \frac{1}{2} C_2 e^{-t} - 1, \quad y = \frac{1}{2} C_1 e^t - \frac{1}{2} C_2 e^{-t} + 1. \qquad \square$$

§ 8.3. Системы линейных дифференциальных уравнений. Теорема Коши

Система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t), \end{cases} \tag{8.8}$$

где $a_{ij}(t)$ и $b_i(t)$ — заданные, а $y_i = y_i(t)$ — неизвестные функции $(i, j = 1, \ldots, n)$, называется *линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений*.

В случае, когда $b_1(t) \equiv \ldots \equiv b_n(t) \equiv 0$, система (8.8) называется *однородной*.

Если ввести обозначения

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \cdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{8.9}$$

то неоднородную систему (8.8) кратко можно записать в следующей векторно-матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \tag{8.10}$$

а соответствующую однородную систему — в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y}. \tag{8.11}$$

Рассмотрим задачу Коши для линейной неоднородной системы (8.10):

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0, \tag{8.12}$$

где $(t_0, \mathbf{y}^0) = (t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ — фиксированная начальная точка.

Справедлива следующая теорема Коши.

Теорема 8.3.1 (Коши). *Пусть матрица $A(t)$ и вектор-функция $\mathbf{b}(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Тогда, какова бы ни была начальная точка $(t_0, \mathbf{y}^0) \in \mathbf{R}^{n+1}$, задача Коши* (8.12) *имеет решение $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ на отрезке $[a, b]$, при том это решение единственное.*

Последняя теорема имеет глобальный характер в том смысле, что решение существует не в некоторой окрестности точки t_0, а на всем отрезке $[a,b]$.

§ 8.4. Линейная зависимость и линейная независимость вектор-функций. Определитель Вронского

Рассмотрим систему вектор функций:

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}_1(t) = (y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\mathbf{y}_n(t) = (y_{1n}(t), \ldots, y_{nn}(t)). \end{aligned} \tag{8.13}$$

Понятия линейной зависимости и линейной независимости вектор-функций (8.13) определяются также, как они были определены для систем скалярных функций (см. определение 7.15.1).

Определение 8.4.1. Определитель

$$W(t) \equiv W[\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)] = \begin{vmatrix} y_{11}(t) & \ldots & y_{1n}(t)\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ y_{n1}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского*, или *вронскианом* системы вектор-функций (8.13).

Теорема 8.4.1 (необходимое условие линейной зависимости вектор-функций). *Если система вектор-функций* (8.13) *линейно зависима на отрезке* $[a,b]$, *то определитель Вронского* $W(t)$ *этой системы тождественно равен нулю на отрезке* $[a,b]$: $W(t) = 0$ *для всех* $t \in [a,b]$.

Доказательство. Пусть вектор-функции (8.13) линейно зависимы на отрезке $[a,b]$. Это значит, что существуют такие числа α_1, ..., α_n, не все равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1\mathbf{y}_1(t) + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}_n(t) = \mathbf{0}$$

для всех $t \in [a,b]$. Теперь заметим, что последнее векторное равенство эквивалентно следующей системе равенств:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(t) + \ldots + \alpha_n y_{1n}(t) = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_1 y_{n1}(t) + \ldots + \alpha_n y_{nn}(t) = 0. \end{cases} \tag{8.14}$$

Так как последняя система при всех $t \in [a, b]$ имеет нетривиальное решение α_1, …, α_n, то определитель системы алгебраических уравнений (8.14), который совпадает с определителем Вронского $W(t)$ вектор-функций (8.13), равен нулю для всех $t \in [a, b]$.

Теорема доказана. □

Следствие 8.4.1. *Если определитель Вронского* $W(t)$ *вектор-функций* (8.13) *не равен нулю хотя бы в одной точке* $t_0 \in [a, b]$: $W(t_0) \neq 0$, *то система вектор-функций* (8.13) *линейно независима на отрезке* $[a, b]$.

Как и в скалярном случае (см. теорему 7.16.2) справедливо следующее необходимое и достаточное условие линейной независимости вектор-функций в том случае, когда они являются решениями однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y}. \tag{8.15}$$

Теорема 8.4.2. *Пусть вектор-функции* $\mathbf{y}_1(x)$, …, $\mathbf{y}_n(x)$ *являются решениями однородной системы* (8.15) *с непрерывной на отрезке* $[a, b]$ *матрицей* $A(t)$. *Тогда вектор-функции* $\mathbf{y}_1(x)$, …, $\mathbf{y}_n(x)$ *линейно независимы на отрезке* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда их определитель Вронского* $W(t) \equiv$ $\equiv W[\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)]$ *не равен нулю ни в одной точке отрезка* $[a, b]$.

§ 8.5. Структура общего решения линейных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную однородную систему дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n, \end{array}\right. \tag{8.16}$$

или в векторно-матричной форме

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y}. \tag{8.17}$$

Определение 8.5.1. Система из n линейно независимых на отрезке $[a, b]$ решений $\mathbf{y}_1(t) = (y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t)), \ldots, \mathbf{y}_n(t) = (y_{1n}(t), \ldots, y_{nn}(t))$ однородной системы (8.16) называется *фундаментальной системой решений* системы (8.16), а квадратная матрица

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \ldots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

называется *фундаментальной матрицей* системы (8.16).

Прежде чем сформулировать теорему о структуре общего решения линейной однородной системы (8.16), докажем следующее утверждение.

Теорема 8.5.1. *Пусть вектор-функции* $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ *и* $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ *являются решениями линейной однородной системы* (8.17). *Тогда вектор функции* $\mathbf{y} + \mathbf{z}$ *и* $\alpha\mathbf{y}$, *где* α *— произвольная постоянная также являются решениями этой системы.*

Доказательство. В самом деле,

$$\frac{d(\mathbf{y} + \mathbf{z})}{dt} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} + \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + A(t)\mathbf{z} = A(t)(\mathbf{y} + \mathbf{z}),$$

$$\frac{d(\alpha\mathbf{y})}{dt} = \alpha\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \alpha A(t)\mathbf{y} = A(t)(\alpha\mathbf{y}).$$

Эти два равенства и завершают доказательство теоремы. □

Замечание 8.5.1. Из последней теоремы по индукции следует, что если $\mathbf{y}_1(t)$, …, $\mathbf{y}_n(t)$ — решения линейной однородной системы (8.17), то их линейная комбинация

$$\mathbf{y}(t) = C_1\mathbf{y}_1(t) + \ldots + C_n\mathbf{y}_n(t),$$

где C_1, …, C_n — произвольные постоянные, также является решением этой системы. Более того справедлива следующая теорема.

Теорема 8.5.2 (о структуре общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений). *Если вектор-функции* $\mathbf{y}_1(t) = (y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t)), \ldots, \mathbf{y}_n(t) = (y_{1n}(t), \ldots, y_{nn}(t))$ *на отрезке* $[a, b]$ *являются фундаментальной системой* *решений системы* (8.16) *с непрерывной на этом отрезке матрицей* $A(t)$, *то их линейная комбинация*

$$\mathbf{y}(t) = C_1\mathbf{y}_1(t) + \ldots + C_n\mathbf{y}_n(t),$$

где C_1, ..., C_n — *произвольные постоянные, является общим решением линейной однородной системы* (8.16) *на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство этой теоремы можно провести как в случае линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (см. теорему 7.16.4).

Структура общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t), \end{cases} \tag{8.18}$$

или в векторно-матричной форме (см. обозначения (8.9))

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \tag{8.19}$$

описывается следующей теоремой.

Теорема 8.5.3 (о структуре общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений). *Пусть в системе* (8.19) *матрица* $A(t)$ *и вектор-функция* $\mathbf{b}(t)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *и пусть на этом отрезке вектор-функции* $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ *являются фундаментальной системой решений соответствующей однородной системы* (8.16), *а* $\mathbf{y}_0$ — *некоторое частное решение неоднородной системы* (8.19). *Тогда вектор функция*

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}_1 + \ldots + C_n\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_0$$

является общим решением неоднородной системы (8.19) *на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 7.17.1 о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

§ 8.6. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{8.20}$$

или в векторно-матричной форме

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}, \tag{8.21}$$

где $A = \|a_{ij}\|$ — произвольная числовая матрица.

Решение системы (8.20) будем искать в следующем виде:

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad y_n = \alpha_n e^{\lambda t}, \tag{8.22}$$

где α_1, …, α_n и λ — неизвестные числа, подлежащие определению.

В случае $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ имеем *тривиальное решение* системы (8.20): $y_1(t) \equiv \ldots \equiv y_n(t) \equiv 0$. Однако нас будут интересовать нетривиальные решения этой системы.

Для определения неизвестных чисел α_1, …, α_n и λ подставим функции y_i и их производные $\dfrac{dy_i}{dt} = \alpha_i \lambda e^{\lambda t}$, $i = 1, \ldots, n$, в систему (8.20) и полученные уравнения сократим на $e^{\lambda t} \neq 0$. В итоге получим систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0, \end{cases} \tag{8.23}$$

или в матричной форме

$$(A - \lambda E)\alpha = 0, \tag{8.24}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, а

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица.

Для того чтобы система (8.23) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{8.25}$$

или

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{8.26}$$

Уравнение (8.25) называется *характеристическим уравнением* системы (8.20).

Поскольку левая часть уравнения (8.25) есть многочлен степени n относительно переменной λ, то, следовательно, это уравнение имеет n корней с учетом кратностей:

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n. \tag{8.27}$$

Корни уравнения (8.25) или (8.26) называются *собственными значениями* матрицы A.

Предположим, что все собственные значения (8.27) матрицы A различны. Для каждого λ_i, $i = 1, \ldots, n$, решая систему (8.23), получим ее нетривиальное решение

$$\alpha_{i1}, \quad \alpha_{i2}, \quad \ldots, \quad \alpha_{in}.$$

Вектор

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$$

называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим собственному значению λ_i.

Заметим, что собственный вектор определяется не однозначно, а лишь с точностью до скалярного множителя.

Итак, мы доказали следующую теорему

Теорема 8.6.1. *Для того чтобы вектор-функция*

$$\mathbf{y}_i = (\alpha_{i1} e^{\lambda_i t}, \ldots, \alpha_{in} e^{\lambda_i t})$$

была решением системы (8.20), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$$

был собственным вектором матрицы A, *соответствующим собственному значению* λ_i.

Таким образом, собственным значениям λ_1, …, λ_n соответствуют n вектор-функций — решений системы (8.20):

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = (\alpha_{11}e^{\lambda_1 t}, \ldots, \alpha_{1n}e^{\lambda_1 t}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{y}_n = (\alpha_{n1}e^{\lambda_n t}, \ldots, \alpha_{nn}e^{\lambda_n t}), \end{cases} \tag{8.28}$$

где $-\infty < t < +\infty$.

Покажем, что *вектор-функции* (8.28) *на интервале* $(-\infty, +\infty)$ *образуют фундаментальную систему решений системы* (8.20).

Определитель Вронского $W(t)$ вектор-функций (8.28) имеет вид

$$W(t) = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

В точке $t = 0$ имеем

$$W(0) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

поскольку все столбцы последнего определителя являются собственными векторами α_i матрицы A, соответствующими различным собственным значениям λ_i, $i = 1, \ldots, n$. Итак, $W(t) \neq 0$ в точке $t = 0$. Значит, вектор-функции (8.28) на интервале $(-\infty, +\infty)$ образуют фундаментальную систему решений системы (8.20) (см. следствие 8.4.1). Поэтому общее решение системы (8.20) имеет вид

$$\mathbf{y}(t) = C_1\mathbf{y}_1(t) + \ldots + C_n\mathbf{y}_n(t),$$

где C_1, …, C_n — произвольные постоянные (см. теорему 8.5.2). В развернутом виде общее решение есть

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1\alpha_{11}e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n\alpha_{n1}e^{\lambda_n t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(t) = C_1\alpha_{1n}e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n\alpha_{nn}e^{\lambda_n t}. \end{cases} \tag{8.29}$$

Пример 8.6.1. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 3y_1 - y_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет простые корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$. Для нахождения собственного вектора α_1, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = 2$, следует решить систему

$$\begin{cases} (1-\lambda)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + (-1-\lambda)\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений. Положим $\alpha_1 = 1$. Тогда $\alpha_2 = 1$. Итак, $\alpha_1 = (1, 1)$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 2$. В силу теоремы 8.6.1

$$\mathbf{y}_1 = (e^{2t},\ e^{2t})$$

— решение данной системы.

Точно так же при $\lambda_2 = -2$ получаем систему

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

откуда и находим собственный вектор $\alpha_2 = (1, -3)$, а с ним и еще одно решение данной системы:

$$\mathbf{y}_2 = (e^{-2t},\ -3e^{-2t}).$$

Итак, общее решение исходной системы есть

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1e^{2t} + \ \ C_2e^{-2t}, \\ y_2(t) = C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t}, \end{cases}$$

(см. (8.29)). □

Пусть теперь характеристическое уравнение (8.25) имеет корень λ_i кратности r_i. Не вдаваясь в подробности, отметим, что в этом случае частное решение системы (8.20) можно искать в виде

$$\mathbf{y}_i = (P_{i1}(t)e^{\lambda_i t}, \ldots, P_{in}(t)e^{\lambda_i t}), \tag{8.30}$$

где $P_{i1}(t)$, …, $P_{in}(t)$ — многочлены степени $r_i - 1$, коэффициенты которых определяются из системы линейных уравнений, получающейся в результате подстановки вектор-функции (8.30) в исходную систему (8.20) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях t.

П р и м е р 8.6.2. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 3y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \ \ y_1 + y_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корень $\lambda_1 = 2$ кратности 2. Поэтому решение данной системы ищем в виде

$$\begin{cases} y_1(t) = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{2t}, \\ y_2(t) = (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{2t}. \end{cases}$$

Подставляя эти функции в исходную систему, сокращая полученные равенства на $e^{2t} \neq 0$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$\begin{cases} \beta_1 - \beta_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 = 0, \\ \beta_1 - \beta_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\alpha_1 = C_1$ и $\beta_1 = C_2$, из последней системы имеем $\beta_2 = C_2$ и $\alpha_2 = C_1 - C_2$.

Итак, общим решением исходной системы является

$$\begin{cases} y_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}, \\ y_2(t) = [(C_1 - C_2) + C_2 t]e^{2t}. \end{cases}$$

□

Глава 9

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 9.1. Понятие функции комплексного переменного

Комплексные числа и связанные с ними понятия мы уже рассмотрели в гл. 7 книги «Высшая математика. Основы математического анализа».

Пусть D и E — два множества комплексных чисел. Если каждому комплексному числу $z \in D$ по некоторому закону f поставлено в соответствие определенное комплексное число $w \in E$, то говорят, что на множестве D задана *однозначная функция комплексного переменного* $w = f(z)$, отображающая множество D в множество E.

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько значений $w \in \in E$, то функция $w = f(z)$ называется *многозначной*.

Множество D называется *областью определения* функции $f(z)$. Если каждая точка множества E является значением функции $w = f(z)$, то множество E называется *областью значений* этой функции.

Пример 9.1.1. Функции

$$f(z) = |z| \quad \text{и} \quad f(z) = z^n,$$

где n — натуральное число, являются примерами однозначных функций комплексного переменного, определенных на всей комплексной плоскости.

Пример 9.1.2. Функции

$$f(z) = \sqrt[n]{z} \quad \text{и} \quad f(z) = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,$$

где $n \geqslant 2$, а $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, являются примерами многозначных функций комплексного переменного, определенных на всей комплексной плоскости.

Функцию комплексного переменного $f(z)$ можно записать в виде
$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y),$$
где $z = (x, y) \in D$.

Функции двух переменных
$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z),$$
$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$
соответственно называются *действительной* и *мнимой* частями функции $f(z)$.

Итак, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

Пример 9.1.3. Найти действительную и мнимую части функции комплексного переменного $f(z) = z^2 - 2z - 1$.

Комплексное число z представим в алгебраической форме: $z = x + iy$. Тогда
$$f(z) = (x+iy)^2 - 2(x+iy) - 1 = x^2 + 2ixy - y^2 - 2x - 2iy - 1 = \\ = x^2 - y^2 - 2x - 1 + 2y(x-1)\,i.$$
Итак, $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - 2x - 1$, а $\operatorname{Im} f(z) = 2y(x-1)$.

§ 9.2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть $w = f(z)$ — однозначная функция комплексного переменного, определенная в некоторой окрестности точки z_0, за исключением, может быть, самой точки z_0.

Комплексное число A называется *пределом функции* $f(z)$ *в точке* z_0, если для произвольного действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое, зависящее от ε, число $\delta(\varepsilon) > 0$, что
$$|f(z) - A| < \varepsilon$$
для всех z, удовлетворяющих условию
$$0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon).$$
В этом случае пишут
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A. \tag{9.1}$$

Полагая $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $A = a + ib$ и $z_0 = x_0 + iy_0$, получим, что из существования предела (9.1) следует существование пределов

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = a,$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = b.$$

Верно и обратное утверждение.

Это замечание позволяет перенести всю теорию пределов функций действительных переменных на функции комплексных переменных. Например, если функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют пределы в точке z_0, то

$$\lim_{z \to z_0} Cf(z) = C \lim_{z \to z_0} f(z), \qquad (C = \text{const}),$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}, \qquad \left(\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0\right).$$

Пусть теперь функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, в том числе и в самой точке z_0. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если выполняется равенство

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{9.2}$$

Функция $f(z)$, определенная на множестве D, называется *непрерывной*, если она непрерывна в каждой точке множества D.

Условие (9.2) непрерывности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентно двум следующим равенствам:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0),$$

выражающим непрерывность двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Итак, *функция комплексного переменного* $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ *непрерывна в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$ *тогда и только тогда, когда ее действительная и мнимая части*

$\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$ *и* $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)$, *рассматриваемые как функции двух действительных переменных, непрерывны в той же точке* (x_0, y_0).

Отсюда следует, что многие свойства непрерывных функций двух действительных переменных без труда переносятся на непрерывные функции комплексного переменного. Например, *сумма*, *разность*, произведение и частное двух непрерывных функций комплексного переменного суть функции непрерывные (*в случае частного предполагается*, *что знаменатель не обращается в ноль*).

Пример 9.2.1. Функция $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ определена и непрерывна во всех точках $z = x + iy$ комплексной плоскости.

§ 9.3. Производная функции комплексного переменного

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z, включая саму эту точку.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \tag{9.3}$$

то он называется *производной от функции* $f(z)$ *в точке* z и обозначается через $f'(z)$ или $\dfrac{df}{dz}$, а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z. Итак,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{9.4}$$

Отметим, что существование производной функции комплексного переменного — достаточно сильное требование. Это объясняется тем, что в пределе (9.3) Δz на комплексной плоскости стремится к нулю по любому направлению, а таких направлений — бесконечное множество.

Как и в случае функции действительного переменного, здесь также справедливо утверждение: *из существования производной функции* $f(z)$ *в точке* z *следует ее непрерывность в этой точке*, *в то время*, *как обратное утверждение не имеет места*.

Пусть функции комплексного переменного $u(z)$ и $v(z)$ имеют производные в точке z. Тогда справедливы следующие *основные свойства производных* функций комплексного переменного:

$$[u(z) \pm v(z)]' = u'(z) \pm v'(z), \tag{9.5}$$

$$[u(z)v(z)]' = u'(z)v(z) + u(z)v'(z), \tag{9.6}$$

$$\left[\frac{u(z)}{v(z)}\right]' = \frac{u'(z)v(z) - u(z)v'(z)}{v^2(z)} \quad (v(z) \neq 0). \tag{9.7}$$

Справедливо также следующее утверждение о производной сложной функции: *если $w = \varphi(v)$ — функция комплексного переменного v, имеющая производную в точке v, а $v = \psi(z)$ — функция комплексного переменного, имеющая производную в точке z, то сложная функция*

$$w = F(z) = \varphi[\psi(z)]$$

имеет производную в точке z, которая вычисляется по формуле

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{dz}. \tag{9.8}$$

§ 9.4. Условия Коши–Римана

Теорема 9.4.1. *Если функция*

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

имеет производную в точке $z = x + iy$, то действительные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют частные производные первого порядка в точке (x,y), которые удовлетворяют следующим условиям Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9.9}$$

Доказательство. Пусть существует производная

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z},$$

где

$$\Delta w = [u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)],$$

а

$$\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y.$$

Так как $\Delta z \to 0$ произвольным образом, то, полагая $\Delta y = 0$, получим

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} =$$
$$= \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \cdot \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x},$$

следовательно,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} +$$
$$+ i \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Точно так же, полагая на этот раз $\Delta x = 0$, получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\,\Delta y} +$$
$$+ i \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\,\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Из последних двух равенств имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{9.10}$$

откуда и следуют условия Коши–Римана (9.9).

Теорема доказана. □

Замечание 9.4.1. Формула (9.10), которая была получена в ходе доказательства предыдущей теоремы, дает правило вычисления производной функции комплексного переменного $f(z)$.

Обратное утверждение последней теоремы верно при условии, что частные производные от u и v непрерывны.

Теорема 9.4.2. *Если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют в точке (x,y) непрерывные частные производные первого порядка, удовлетворяющие условия Коши–Римана* (9.9), *то функция комплексного переменного*

$$w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

имеет производную в точке $z = x + iy$.

Доказательство. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные в точке (x, y). Тогда они дифференцируемы в этой точке, т. е. полные приращения этих функций можно представить в виде

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha,$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta,$$

где α и β — бесконечно малые более высокого порядка, чем $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Тогда, учитывая условия Коши–Римана (9.9), получим

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x + i\,\Delta y} = \\
&= \frac{\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha\right] + i\left[\dfrac{\partial v}{\partial x}\,\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta\right]}{\Delta x + i\,\Delta y} = \\
&= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x}\,\Delta x + i\,\dfrac{\partial v}{\partial y}\,\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y} + \frac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\,\Delta y} = \\
&= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\,\Delta y) + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\,\Delta y)}{\Delta x + i\,\Delta y} + \gamma = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma,
\end{aligned}$$

где $\gamma = \dfrac{\alpha + i\beta}{\Delta x + i\,\Delta y}$ — бесконечно малая высшего порядка относительно $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Следовательно,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Итак, мы доказали существование производной функции $f(z)$ в точке z.

Теорема доказана. $\square$

§ 9.5. Аналитические функции

Фундаментальным понятием в теории функций комплексного переменного является понятие *аналитической функции.*

Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она дифференцируема, т.е. имеет производную $f'(z)$ во всех точках z области D.

Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* z_0, если она аналитическая в некоторой окрестности D этой точки.

Функция $f(z)$ называется аналитической на замыкании $\overline{D}$ области D, если она аналитическая в некоторой области G, которая содержит в себе множество $\overline{D}$, где $\overline{D} \subset G$.

Из теорем 9.4.1 и 9.4.2 непосредственно следует

Теорема 9.5.1. *Для того чтобы функция комплексного переменного*

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

была аналитической в области $D \in \mathbf{C}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали непрерывные частные производные первого порядка функций* u *и* v *в* D, *удовлетворяющие условиям Коши–Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9.11}$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются *сопряженными*, если они удовлетворяют условиям (9.11). Итак, из последней теоремы следует, что действительная и мнимая части аналитической функции являются сопряженными.

Пример 9.5.1. Функция $\mathrm{Re}(z) = x$ не является аналитической на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, поскольку для этой функции $u(x,y) = x$, $v(x,y) = 0$, которые, очевидно, не удовлетворяют условиям Коши–Римана.

Пример 9.5.2. Проверить аналитичность функции $f(z) = z^2$ на всей комплексной плоскости.

Найдем действительную и мнимую части функции $f(z) = z^2$:

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy.$$

Итак, $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$. Теперь вычислим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \quad 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Итак, условия Коши–Римана (9.11) выполняются во всех точках комплексной плоскости. Значит, функция $f(z) = z^2$ аналитична на всей комплексной плоскости.

§ 9.6. Гармонические функции

Определение 9.6.1. Функция двух переменных $u(x, y)$ называется *гармонической* в области D, если она имеет непрерывные частные производные второго порядка в D и удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{9.12}$$

Уравнение Лапласа примет вид

$$\Delta u = 0,$$

если обозначить

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Δ называется *опрератором Лапласа*.

Теорема 9.6.1. *Действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z)$ являются гармоническими функциями.*

Доказательство. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ аналитична в области D. Тогда функции u и v имеют непрерывные частные производные на D любого порядка и удовлетворяют условиям Коши–Римана (теорема 9.5.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9.13}$$

Из последних равенств следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$. Значит, функции u и v являются гармоническими в области D.

Теорема доказана. □

Пример 9.6.1. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по ее заданной действительной части $u = x^2 - 2xy$.

Нетрудно проверить, что функция $u = x^2 - 2xy$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, т. е. является гармонической функцией.

Для нахождения мнимой части v воспользуемся условиями Коши–Римана. Так как

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y,$$

то $v = 2xy - y^2 + \varphi(x)$. Если воспользоваться вторым условием Коши–Римана $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, то для определения функции $\varphi(x)$ получим уравнение $-2x = -2y - \varphi'(x)$, откуда находим $\varphi(x) = x^2 - 2xy + C$, где C — произвольная постоянная. Итак, $v = 2xy - y^2 + x^2 - 2xy + C = x^2 - y^2 + C$, а значит, $f(z) = x^2 - 2xy + i\,(x^2 - y^2 + C)$.

§ 9.7. Геометрический смысл модуля производной

Пусть $w = f(z)$ аналитическая в области D функция комплексного переменного. Выясним геометрический смысл модуля производной функции $f(z)$ в точке $z_0 \in D$, при условии, что $f'(z_0) \neq 0$.

Функция $w = f(z)$ все точки области D комплексной плоскости z отображает в точки комплексной плоскости w. В частности, точку z_0 отображает в точку $w_0 = f(z_0)$ (рис. 9.1).

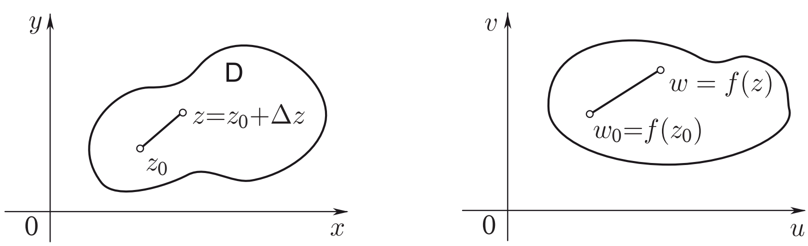

Рис. 9.1

По определению производной

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Следовательно,

$$|f'(z_0)| = \left|\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}.$$

Числа $|z-z_0|$ и $|f(z)-f(z_0)|$ представляют собой соответственно расстояния между точками z и z_0 плоскости z и между их образами $f(z_0)$ и $f(z)$ в плоскости w.

Отношение $\dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ можно рассматривать как растяжение расстояния между точками z и z_0 в результате отображения посредством функции $w = f(z)$. Следовательно, *модуль производной $|f'(z_0)|$ можно рассматривать как растяжение в точке z_0 при отображении посредством функции $w = f(z)$*. Это и есть *геометрический смысл модуля производной*.

Отметим, что *величина растяжения в точке z_0 не зависит от того, по какому направлению точка z стремится к z_0*. Это свойство отображения $w = f(z)$ называется *свойством постоянства растяжения* в точке z_0. Растяжение в точке может быть меньше единицы, равно единице и больше единицы. Величина $|f'(z_0)|$ называется *коэффициентом растяжения*, если $|f'(z_0)| > 0$, и *коэффициентом сжатия*, если $|f'(z_0)| < 1$.

Пример 9.7.1. Найти коэффициент растяжения (сжатия) функции $f(z) = z^2$ в точке $z_0 = 3 + 4i$.

Так как $f'(z) = 2z$, то $|f'(z_0)| = |2(3+4i)| = 10$. Следовательно, при отображении посредством функции $f(z) = z^2$ в точке $z_0 = 3 + 4i$ происходит растяжение плоскости z и коэффициент этого растяжения равен 10.

§ 9.8. Геометрический смысл аргумента производной. Конформные отображения

Рассмотрим аналитическую в некоторой области D функцию комплексного переменного $w = f(z)$. Пусть производная функции $w = f(z)$ в точке $z_0 \in D$ отлична от нуля: $f'(z_0) \neq 0$. Выясним геометрический смысл аргумента производной функции $f(z)$ в точке $z_0 \in D$.

Проведем через точку $z_0 \in D$ какую либо кривую l. Эта кривая в результате отображения посредством функции $w = f(z)$ преобразуется в кривую L, расположенную в плоскости w и проходящую через точку $w_0 = f(z_0)$ (рис. 9.2).

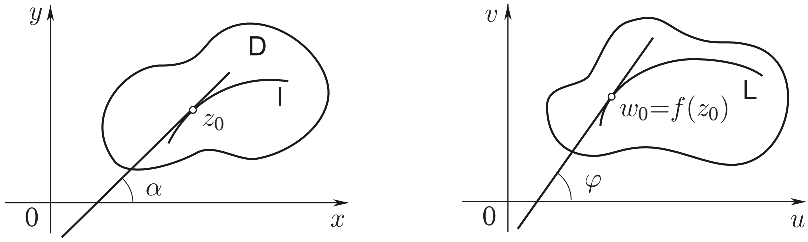

Рис. 9.2

Для аргумента производной $f'(z_0)$ имеем

$$\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) =$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z\to 0} \arg \Delta z = \varphi - \alpha,$$

где α и φ — углы, которые образуют касательные к кривым l и L в точках z_0 и w_0 с положительными направлениями действительных осей на плоскостях z и w соответственно (рис. 9.2). Итак,

$$\varphi = \alpha + \arg f'(z_0). \tag{9.14}$$

Иначе говоря, $\arg f'(z_0)$ *равен углу, на который нужно повернуть касательную к кривой* l *в точке* z_0 *для того, чтобы получить касательную к кривой* L *в точке* $w_0 = f(z_0)$. В этом и заключается *геометрический смысл* $\arg f'(z_0)$.

Пусть теперь l_1 и l_2 — две произвольные кривые, проходящие через точку z_0, а L_1 и L_2 — их образы в плоскости w, проходящие через точку $w_0 = f(z_0)$. Углы, которые образуют с осью Ox касательные к кривым l_1 и l_2 в точке z_0, обозначим через α_1 и α_2. Соответствующие углы в плоскости w обозначим через φ_1 и φ_2 (рис. 9.3).

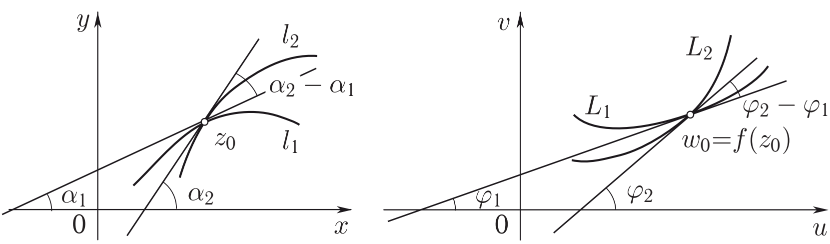

Рис. 9.3

В силу (9.14) имеем

$$\varphi_1 = \alpha_1 + \arg f'(z_0), \qquad \varphi_2 = \alpha_2 + \arg f'(z_0),$$

откуда следует свойство

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha_2 - \alpha_1,$$

то есть, угол между кривыми l_1 *и* l_2 *в точке* z_0 *равен углу между их образами* L_1 *и* L_2 *в точке* $w_0 = f(z_0)$. Это свойство отображения $w = f(z)$ называется *свойством сохранения углов* в точке z_0.

Отображение, обладающее свойствами сохранения углов и постоянства растяжений, называется *конформным отображением*.

Из вышеизложенного следует, что *отображение посредством аналитической функции* $w = f(z)$ *является конформным во всех точках, где* $f'(z) \neq 0$.

§ 9.9. Основные элементарные функции комплексного переменного

1. *Показательная функция.*

Эта функция определяется формулой

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{9.15}$$

Заметим, что показательная функция определена для всех чисел $z = x + iy$ комплексной плоскости. Нетрудно проверить, что действительная и мнимая части этой функции имеют непрерывные частные производные, которые удовлетворяют условиям Коши–Римана и, следовательно, показательная функция $w = e^z$ является аналитической на всей комплексной плоскости (теорема 9.5.1).

Так как $|e^z| = e^x \neq 0$, то функция e^z отлична от нуля во всех точках комплексной плоскости: $e^z \neq 0$. Легко убедиться также, что эта функция не имеет смысла при $z \to \infty$. Действительно, достаточно заметить, что при $x \to +\infty$ имеем $e^z \to \infty$, а при $x \to -\infty$ имеем $e^z \to 0$.

Показательная функция $w = e^z$ обладает следующим свойством:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \tag{9.16}$$

Действительно, по правилу умножения комплексных чисел имеем

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} e^{x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} =$$

$$= e^{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = e^{z_1 + z_2}.$$

Показательная функция комплексного переменного обладает и специфическим свойством: она является периодической функцией с основным периодом $2\pi i$. В самом деле,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Производная функции $w = e^z$ вычисляется по формуле

$$(e^z)' = e^z.$$

Действительно, применяя формулу вычисления производной функции комплексного переменного (9.10), получим

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

2. *Логарифмическая функция.*

Обратная функция показательной функции $z = e^w$ называется *логарифмической функцией комплексного переменного* и обозначается через

$$w = \operatorname{Ln} z.$$

Так как значения показательной функции $z = e^w$ всегда отличны от нуля, то область определения логарифмической функции $w = \operatorname{Ln} z$ есть вся комплексная плоскость, за исключением точки $z = 0$. Кроме того, поскольку показательная функция $z = e^w$ является периодической, то логарифмическая функция комплексного переменного $w = \operatorname{Ln} z$ имеет бесконечное множество значений, т. е. является многозначной функцией. Полагая $z = \mathrm{r}e^{i\varphi}$, $w = \operatorname{Ln} z = u + iv$, согласно определению логарифмической функции получим $e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = \mathrm{r}e^{i\varphi}$. Откуда имеем $e^u = r$, то есть $u = \ln r$, $v = \varphi + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Следовательно,

$$w = \operatorname{Ln} z = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2\pi k) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k).$$

Итак,

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \tag{9.17}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. При $k = 0$ получаем однозначную функцию, которую называют *главным значением* логарифма $\operatorname{Ln} z$ и обозначают через $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \tag{9.18}$$

где $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

Воспользовавшись формулой (9.17), нетрудно доказать следующие свойства натурального логарифма:

$$\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2,$$

$$\mathrm{Ln}\,\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2.$$

Пример 9.9.1. Вычислить следующие значения логарифмической функции: $\mathrm{Ln}\,(-1)$, $\mathrm{Ln}\, i$.

Положим $z = -1$. Так как $|z| = 1$, а $\arg z = \pi$, то в силу (9.17)

$$\mathrm{Ln}\,(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(2k+1),$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Для числа $z = i$ имеем $|z| = 1$ и $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$. Значит, по той же формуле (9.17)

$$\mathrm{Ln}\, i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = i\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right),$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

В частности, $\ln(-1) = i\pi$ и $\ln i = i\dfrac{\pi}{2}$.

3. *Степенная функция.*

Пусть n — натуральное число. Степенная функция $w = z^n$ от комплексного переменного $z = \mathrm{r}e^{i\varphi}$ определяется формулой

$$w = z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Функция $w = z^n$ — однозначная.

Степенная функция $w = z^a$ с произвольным комплексным показателем a определяется формулой

$$w = z^a = e^{a \mathrm{Ln}\, z}.$$

Функция $w = z^a$ — многозначная и определена для всех $z \neq 0$.

4. *Тригонометрические функции.*

Тригонометрические функции комплексного переменного определяются формулами

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \tag{9.19}$$

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Формулы (9.19) называются *формулами Эйлера*. Формулой Эйлера называется также и формула

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{9.20}$$

которая получается в результате умножения обеих частей первой формулы (9.19) на i и сложения со второй формулой.

Из формул (9.19) непосредственно следует, что $\cos z$ является четной функцией, а $\sin z$ — нечетной. Из этих же формул вытекает, что $\sin z$ и $\cos z$ являются периодическими функциями с основным периодом 2π.

Известные из тригонометрии соотношения между тригонометрическими функциями действительного переменного справедливы также для тригонометрических функций комплексного переменного. В частности,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \tag{9.21}$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \tag{9.22}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \tag{9.23}$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \tag{9.24}$$

и т. д.

Докажем, например, последние две формулы: согласно свойству показательной функции (9.16) имеем

$$e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} \cdot e^{iz_2}$$

или, в силу (9.20),

$$\cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) = (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2).$$

Раскрывая скобки в правой части последнего равенства, получим

$$\cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2) = \\ = (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i\,(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \tag{9.25}$$

Если в этой формуле подставить $-z_1$ и $-z_2$ вместо z_1 и z_2, то получим

$$\cos(z_1 + z_2) - i \sin(z_1 + z_2) = \\ = (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) - i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \tag{9.26}$$

Складывая и вычитая почленно равенства (9.25) и (9.26), получим, соответственно, формулы (9.23) и (9.24).

5. *Гиперболические функции.*

Гиперболические функции комплексного переменного определяются формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \qquad (9.27)$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

6. *Обратные тригонометрические и гиперболические функции.*

Функция, обратная к функции $z = \sin w$, называется *арксинусом* и обозначается

$$w = \operatorname{Arcsin} z.$$

По определению синуса, имеем

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2i\, e^{iw}}$$

или $e^{2iw} - 2i\, ze^{iw} - 1 = 0$. Отсюда находим $e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$ ($\sqrt{1 - z^2}$ имеет два значения согласно определению корня n-й степени из комплексного числа; см. «Высшая математика. Основы математического анализа», § 7.5). Тогда $w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$. Таким образом,

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Аналогично можно определить функции $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ и доказать, что

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$
$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}, \quad z \neq \pm i,$$
$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}, \quad z \neq \pm i.$$

Для *обратных гиперболических функций* $\operatorname{Arcsh} z$, $\operatorname{Arcch} z$, $\operatorname{Arcth} z$, $\operatorname{Arccth} z$ справедливы формулы

$$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right),$$
$$\operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$
$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z},$$

$$\operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции являются многозначными.

§ 9.10. Интегрирование функций комплексного переменного. Основные свойства

Пусть L — спрямляемая кривая комплексной плоскости с началом в точке A и концом в точке B. На кривой L выберем одно из двух возможных направлений, скажем, направление из точки A в точку B (рис. 9.4). Ту же кривую с противоположным направлением обозначим через L^-.

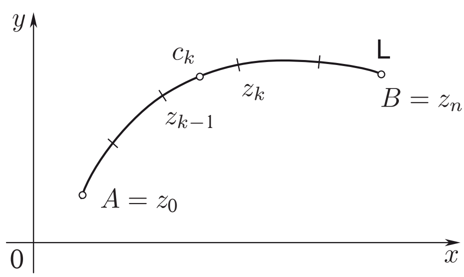

Рис. 9.4

Рассмотрим непрерывную функцию комплексного переменного $f(z)$, которая определена на кривой L. Кривую L разобьем на n частей в направлении от A к B точками $z_0 = A$, z_1, z_2, …, $z_n = B$. На каждой дуге $z_{k-1}z_k$ выберем произвольную точку c_k и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k, \tag{9.28}$$

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Если существует предел интегральной суммы (9.28) при $\max|\Delta z_k| \to 0$, то он называется *интегралом функции комплексного переменного $f(z)$ по кривой L* и обозначается символом $\int\limits_L f(z)\,dz$.

Итак,

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k. \tag{9.29}$$

Пусть теперь L — гладкая кривая, заданная *комплексным параметрическим уравнением*

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t),$$

где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, а $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ — непрерывная и однозначная функция, определенная на L. Тогда

$$f(c_k) = u(\xi_k,\eta_k) + i\,v(\xi_k,\eta_k),$$

$$\Delta z_k = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + i\,y_{k-1}) = \Delta x_k + i\,\Delta y_k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k) + i\,v(\xi_k,\eta_k)]\cdot[\Delta x_k + i\,\Delta y_k] = \\ = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] + \\ + i\cdot\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k].\end{aligned}$$

Заметим, что обе суммы правой части последнего равенства являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов, которые существуют в силу сделанных предположений. Следовательно, переходя к пределу в последнем равенстве при $\max|\Delta z_k| \to 0$, получим

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L u\,dx - v\,dy + i\int\limits_L v\,dx + u\,dy. \tag{9.30}$$

Итак, вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций двух действительных переменных.

Формулу (9.30) можно записать в следующем, удобном для запоминания, виде:

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L (u+iv)(dx + i\,dy). \tag{9.31}$$

Если учесть, что

$$u[x(t),y(t)] + i\,v[x(t),y(t)] = f[z(t)],$$

$$dx + i\,dy = x'(t)\,dt + i\,y'(t)\,dt = [x'(t) + i\,y'(t)]\,dt = z'(t)\,dt,$$

то последняя формула примет вид

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L f[z(t)]z'(t)\,dt. \tag{9.32}$$

Перечислим основные свойства интеграла от функции комплексного переменного, которые получаются на основании соответствующих свойств криволинейного интеграла.

1°. $\int\limits_L f(z)\,dz = -\int\limits_{L^-} f(z)\,dz$, где L^- есть кривая L, ориентированная в обратную сторону.

2°. $\int\limits_L [f(z) \pm g(z)]\,dz = \int\limits_L f(z)\,dz \pm \int\limits_L g(z)\,dz.$

3°. Пусть λ — произвольное комплексное число. Тогда

$$\int\limits_L \lambda f(z)\,dz = \lambda \int\limits_L f(z)\,dz.$$

4°. Если кривая L представляется в виде суммы двух кривых L_1 и L_2: $L = L_1 + L_2$, то

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz.$$

5°. Если во всех точках кривой L справедливо неравенство $|f(z)| \leqslant M$, то

$$\left|\int\limits_L f(z)\,dz\right| \leqslant M \cdot l,$$

где l — длина кривой L.

Пример 9.10.1. Вычислить

$$\int\limits_L \frac{dz}{z - z_0},$$

где L — окружность радиуса r с центром в точке z_0, ориентированная против часовой стрелки.

Кривую L можно задать уравнением $z = z_0 + \mathrm{r}e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Следовательно, $dz = rie^{i\varphi}d\varphi$. Значит,

$$\int\limits_L \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{rie^{i\varphi}\, d\varphi}{r\, e^{i\varphi}} = i \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Итак,

$$\int\limits_L \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i. \tag{9.33}$$

Пример 9.10.2. Вычислить

$$\int\limits_L (z - z_0)^n dz,$$

где L — окружность радиуса r с центром в точке z_0, ориентированная против часовой стрелки, а $n \neq -1$ — любое целое число.

Как и в предыдущем примере, кривую L зададим уравнением $z = z_0 + \mathrm{r}e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Тогда

$$\int\limits_L (z - z_0)^n dz = \int\limits_0^{2\pi} r^{n+1} i e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = ir^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi =$$
$$= ir^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = 0.$$

Итак,

$$\int\limits_L (z - z_0)^n dz = 0. \tag{9.34}$$

§ 9.11. Интегральная теорема Коши

В теории функций комплексного переменного важную роль играет следующая теорема.

Теорема 9.11.1 (интегральная теорема Коши). *Если функция комплексного переменного $f(z)$, аналитическая в односвязной области D, то интеграл от $f(z)$ по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру L, лежащему в области D, равен нулю*:

$$\int\limits_L f(z)\, dz = 0.$$

Доказательство. Пусть функция $f(z) = u + iv$ — аналитическая на односвязной области D. Тогда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, причем выполняются условия Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Из этих условий по формуле Грина (2.34) следует равенство нулю криволинейных интегралов $\int\limits_L u\,dx - v\,dy$ и $\int\limits_L v\,dx + u\,dy$.

Следовательно,

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L u\,dx - v\,dy + i\int\limits_L v\,dx + u\,dy = 0.$$

Замечание 9.11.1. Условие односвязности области D в последней теореме является существенным. Действительно, рассмотрим область D, получающаяся из комплексной плоскости путем исключения точки z_0. Эта область не является односвязной. Функция $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ аналитична в области D, однако утверждение последней теоремы неверно, так как $\int\limits_L \dfrac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, где L — окружность радиуса r с центром в точке z_0 (см. пример 9.10.1).

Следствие 9.11.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитическая на односвязной области D. Тогда для любых кусочно-гладких кривых L_1 и L_2 области D, соединяющих точки $z_0, z_1 \in D$, справедливо равенство*

$$\int\limits_{L_1} f(z)\,dz = \int\limits_{L_2} f(z)\,dz. \tag{9.35}$$

Иначе говоря, интегралы от аналитической на односвязной области D функции $f(z)$ вдоль любых двух кривых L_1 и L_2 с общим началом z_0 и концом z_1 имеют равные значения.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую кусочно-гладкую кривую $L = L_1 + L_2^-$ (рис. 9.5).

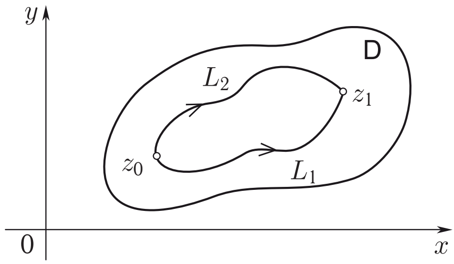

Рис. 9.5

По интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2^-} f(z)\,dz = 0,$$

откуда и следует равенство (9.35).

Интегральная теорема Коши допускает распространение на случай многосвязной области.

Теорема 9.11.2. *Пусть область D ограничена ориентированным кусочно-гладким контуром L. Тогда для функции $f(z)$, аналитической на замкнутой области $\overline{D}$, справедливо равенство*

$$\int\limits_{L} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Докажем эту теорему в случае двусвязной области D с кусочно-гладким контуром $L = L_1 + L_2$. Предположим, что контур L — *положительно ориентирован*, т. е. при обходе по L область D остается слева (рис. 9.6).

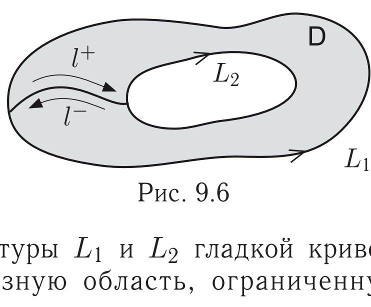

Рис. 9.6

Соединим контуры L_1 и L_2 гладкой кривой l. В результате получим односвязную область, ограниченную положительно

ориентированным контуром $L_1 + l^+ + L_2 + l^-$. По теореме 9.11.1 имеем
$$\int\limits_{L_1+l^++L_2+l^-} f(z)\,dz = 0.$$
Однако
$$\int\limits_{L_1+l^++L_2+l^-} f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{l^+} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz + \int\limits_{l^-} f(z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz = \int\limits_{L_1+L_2} f(z)\,dz = \int\limits_{L} f(z)\,dz = 0.$$
Что и требовалось доказать. □

Из последней теоремы как следствие получается

Теорема 9.11.3. *Пусть область D ограничена внешним контуром L и внутренними контурами L_1, L_2, …, L_n, которые ориентированы против часовой стрелки* (рис. 9.7). *Тогда для функции $f(z)$, аналитической на замкнутой области $\overline{D}$, справедливо равенство*
$$\int\limits_{L} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{L_k} f(z)\,dz. \tag{9.36}$$

Доказательство. По теореме 9.11.2 имеем
$$\int\limits_{L} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{L_k^-} f(z)\,dz = 0,$$
откуда и следует равенство (9.36), так как
$$\int\limits_{L_k^-} f(z)\,dz = -\int\limits_{L_k} f(z)\,dz.$$

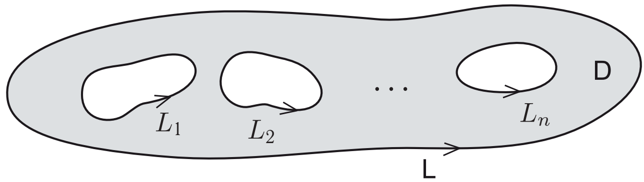

Рис. 9.7

§ 9.12. Формула Ньютона–Лейбница

Из интегральной теоремы Коши 9.11.1 вытекает, что *интеграл от аналитической на односвязной области D функции не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от начальной и конечной точек этого пути* (см. следствие 9.11.1). По этой причине, если кривая L соединяет точки z_0 и z_1, то для интеграла $\int\limits_L f(z)\,dz$ естественно применить обозначение $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$. Тогда z_0 и z_1 называются *пределами интегрирования*.

Теперь зафиксируем точку z_0 и рассмотрим функцию верхнего предела

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

Доказывается, что $F(z)$ — *аналитическая функция, производная которой равна* $f(z)$, т. е. $F'(z) = f(z)$.

Функция $\Phi(z)$ называется *первообразной* для функции $f(z)$ в области D, если $\Phi'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$.

Покажем, что если $\Phi(z)$ — любая первообразная функции $f(z)$, то

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz + C, \tag{9.37}$$

где C — некоторая постоянная. Для этого положим

$$\omega(z) = \Phi(z) - \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

и докажем, что $\omega(z) = C$. Так как

$$\omega'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = f(z) - f(z) = 0,$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Следовательно,

$$u(x,y) = C_1, \quad v(x,y) = C_2,$$

то есть,

$$\omega(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = C_1 + i\,C_2 = C.$$

Теперь полагая $z = z_0$ в представлении (9.37), получим $\Phi(z_0) = C$, а значит,

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \Phi(z) - \Phi(z_0). \tag{9.38}$$

Полученная формула называется *формулой Ньютона–Лейбница*. Эта формула позволяет сводить вычисление интеграла от аналитической функции $f(z)$ к отысканию какой-либо первообразной для этой функции.

§ 9.13. Интегральная формула Коши

Теорема 9.13.1. *Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в области G, а L — замкнутая положительно ориентированная кусочно-гладкая кривая, принадлежащая области G вместе со своей внутренностью D. Тогда для всякой точки $z_0 \in D$ справедлива формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}. \tag{9.39}$$

Доказательство. Пусть γ — положительно ориентированная окружность с центром в точке z_0 и радиуса r, столь малого, чтобы круг $|z - z_0| \leqslant r$ лежал в D (рис. 9.8).

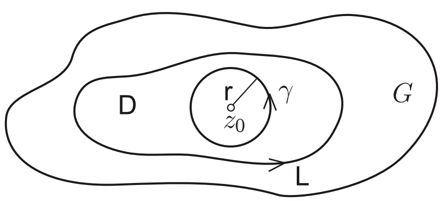

Рис. 9.8

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

В силу теоремы 9.11.3 имеем

$$\int\limits_L \varphi(z)\,dz = \int\limits_\gamma \varphi(z)\,dz. \tag{9.40}$$

Из этого равенства следует, что значение интеграла $\int\limits_\gamma \varphi(z)\,dz$ на самом деле от радиуса r не зависит. Докажем, что

$$\int\limits_\gamma \varphi(z)\,dz = 0.$$

Для этого достаточно показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой радиус r, что

$$\left|\int\limits_\gamma \varphi(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

Действительно, в силу непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 радиус r можно взять настолько малым, чтобы для всех $z \in \gamma$ выполнялось неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Теперь оценим

$$\left|\int\limits_\gamma \varphi(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi r}\left|\int\limits_\gamma dz\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi r}\cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

Итак, $\int\limits_\gamma \varphi(z)\,dz = 0$, а значит, в силу (9.40), $\int\limits_L \varphi(z)\,dz = 0$. Следовательно, учитывая пример 9.10.1, получим

$$\int\limits_L \varphi(z)\,dz = \int\limits_L \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} - \int\limits_L \frac{f(z_0)\,dz}{z-z_0} =$$

$$= \int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} - f(z_0)\int\limits_L \frac{dz}{z-z_0} = \int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} - 2\pi i\cdot f(z_0) = 0,$$

откуда и следует формула (9.39).

Теорема доказана. $\square$

Формула (9.39) называется *интегральной формулой Коши*. Эта формула является одной из важнейших формул теории функции комплексного переменного. Она позволяет вычислять значения аналитической функции в точках области D, зная ее значения на границе этой области (в точках кривой L).

Таким образом, *аналитическую функцию достаточно определить на границе L области D, а значения в точках D можно вычислить по формуле (*9.39*)*.

Заметим, что формула Коши позволяет вычислить производную n-го порядка функции $f(z)$ в точке z_0. В самом деле, путем последовательного дифференцирования формулы (9.39) по переменной z_0, получим

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \tag{9.41}$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Итак, справедлива

Теорема 9.13.2. *Если функция $f(z)$ — аналитическая в области D, то она имеет производные всех порядков, т. е. бесконечно дифференцируема в этой области.*

Формулы (9.39) и (9.41) широко применяются при вычислениях интегралов от функций комплексного переменного.

Пример 9.13.1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_L \frac{\cos z\,dz}{z^2 - \pi^2},$$

где L — положительно-ориентированный контур, который содержит в себе точку $z = \pi$, но не содержит точку $z = -\pi$ (рис. 9.9).

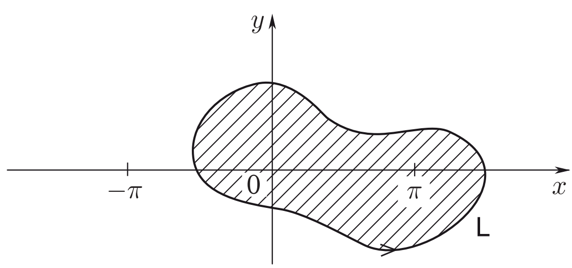

Рис. 9.9

Положим $f(z) = \dfrac{\cos z}{z+\pi}$. Так как эта функция аналитична в замкнутой области, ограниченной контуром L, то по интегральной формуле Коши (9.39) получим

$$\int\limits_L \frac{\cos z\,dz}{z^2-\pi^2} = \int\limits_L \frac{\cos z\,dz}{(z-\pi)(z+\pi)} = \int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{z-\pi} =$$
$$= 2\pi i \cdot f(\pi) = 2\pi i \cdot \frac{\cos\pi}{2\pi} = -i.$$

Пример 9.13.2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_L \frac{\sin z\,dz}{z^2},$$

где L — положительно-ориентированная окружность $|z| = 1$.

Так как функция $f(z) = \sin z$ аналитична в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, то по формуле (9.41) получим

$$\int\limits_L \frac{\sin z\,dz}{z^2} = \int\limits_L \frac{\sin z\,dz}{(z-0)^{1+1}} = \frac{2\pi i}{1!}(\sin z)'\Big|_{z=0} =$$
$$= 2\pi i(\cos z)\Big|_{z=0} = 2\pi i.$$

§ 9.14. Ряды с комплексными членами

Пусть $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность комплексных чисел. Формальное выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{9.42}$$

называется *рядом*. Комплексные числа u_1, u_2, u_3, … называются *членами данного ряда*, а u_n — *общим членом* этого ряда.

Сумма $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ первых n членов ряда (9.42) называется его *n-й частичной суммой*.

Ряд (9.42) называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, частичных сумм этого ряда. При этом число

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

называют *суммой* данного ряда и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Ряд (9.42) называется *расходящимся*, если расходится последовательность частичных сумм этого ряда.

Заметим, что ряд (9.42) с комплексными членами $u_n = a_n + i\,b_n$ можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \ldots + (a_n + ib_n) + \ldots,$$

где a_n и b_n, $n = 1, 2, \ldots$, — действительные числа. Поскольку тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + i \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

то заключаем, что *ряд* (9.42) *сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{9.43}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{9.44}$$

составленные соответственно из действительных и мнимых частей данного ряда. При этом для суммы S ряда (9.42) *справедливо представление $S = S_1 + iS_2$, где S_1 — сумма ряда* (9.43), *а S_2 — сумма ряда* (9.44). Это позволяет исследование сходимости ряда с комплексными членами свести к исследованию сходимости рядов с действительными членами. Этим методом доказываются многие теоремы теории рядов с комплексными членами. Приведем некоторые из них.

Теорема 9.14.1 (необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд* (9.42) *сходится, то его общий член стремится к нулю*: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть сходится ряд (9.42), что эквивалентно сходимости рядов (9.43) и (9.44). Тогда по теореме 3.3.3 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, откуда следует $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + i\,b_n) = 0$. □

Ряд (9.42) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд модулей его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{9.45}$$

Теорема 9.14.2. *Каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. Пусть сходится ряд (9.45). Так как $|a_n| \leqslant |u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $|b_n| \leqslant |u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, то согласно теореме сравнения положительных рядов 3.4.2 сходятся также ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$. Значит, ряды (9.43) и (9.44) сходятся абсолютно. В силу теоремы 3.9.1 эти ряды являются сходящимися, что эквивалентно сходимости ряда (9.42).

Теорема доказана. □

Для исследования на абсолютную сходимость рядов с комплексными членами можно применить признаки сходимости рядов с положительными членами, например, признак Даламбера 3.5.1 или признак Коши 3.6.1.

§ 9.15. Степенные ряды

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots\ + c_n z^n + \ldots\ , \tag{9.46}$$

где c_n — комплексные числа, а z — комплексная переменная, называется *степенным рядом*; $c_1, c_2, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда*.

Степенным рядом называется также ряд по степеням разности $z - z_0$, где z_0 — фиксированное комплексное число:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots\ + \\ + c_n(z-z_0)^n + \ldots\ . \tag{9.47}$$

Заметим, что ряд (9.47) сводится к ряду (9.46) простой заменой переменной $z - z_0 = t$.

Степенные ряды являются простейшими примерами *функциональных рядов*, т. е. рядов, члены которых суть некоторые функции комплексного переменного z.

Множество всех значений z, при которых ряд (9.46) сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

Область сходимости степенного ряда (9.46) не пуста, поскольку в точке $z = 0$ этот ряд сходится.

Теорема 9.15.1 (Абель). *Если степенной ряд* (9.46) *сходится в точке* $z = z_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно для всех* z, *удовлетворяющих неравенству* $|z| < |z_0|$.

Если степенной ряд (9.46) *расходится в точке* $z = z_0$, *то он расходится для всех* z, *удовлетворяющих неравенству* $|z| > |z_0|$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы Абеля в действительном анализе (см. теорему 5.1.1).

Из последней теоремы следует, что *если область сходимости степенного ряда* (9.46) *не совпадает со всей комплексной плоскостью и не вырождается в точку* $z = 0$, *то существует такое число* R, $0 < R < +\infty$, *что*

1) *степенной ряд* (9.46) *сходится абсолютно для всех* $|z| < R$ *и*

2) *степенной ряд* (9.46) *расходится для всех* $|z| > R$.

Это число R и называется *радиусом сходимости*, а круг $|z| < R$ — *кругом сходимости* степенного ряда (9.46).

Из теорем 5.1.3 и 5.1.4 следует, что радиус сходимости степенного ряда (9.46) можно вычислить по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{9.48}$$

либо

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{9.49}$$

§ 9.16. Ряд Тейлора

Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots\ , \tag{9.50}$$

$f(z)$ — сумма этого ряда внутри круга его сходимости $|z - z_0| < R$:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots\ . \tag{9.51}$$

Аналогично теореме 5.3.2 и следствию 5.3.1 можно доказать следующую теорему.

Теорема 9.16.1. *Сумма $f(z)$ степенного ряда* (9.50) *внутри круга сходимости $|z - z_0| < R$ имеет производные всех порядков, которые могут быть получены путем почленного дифференцирования ряда* (9.50) *соответствующее число раз.*

Из этой теоремы следует, что *сумма $f(z)$ степенного ряда* (9.50) *внутри круга сходимости $|z - z_0| < R$ является аналитической функцией.*

Нетрудно заметить, что если продифференцировать почленно n раз представление (9.51), то для вычисления коэффициентов c_n, $n = 1, 2, \ldots$, получим формулу

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{9.52}$$

В силу равенства (9.41) эту формулу можно переписать в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{9.53}$$

где L — произвольный замкнутый положительно-ориентированный контур, принадлежащий кругу сходимости $|z - z_0| < R$ и содержащий внутри себя точку z_0.

Итак, для суммы $f(z)$ степенного ряда (9.50) получили разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \tag{9.54}$$

Последний ряд называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$.

Теорема 9.16.2 (Тейлор). *Всякая однозначная и аналитическая в круге $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\ , \tag{9.55}$$

коэффициенты которого определяются формулами (9.52) *или* (9.53).

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в круге $|z - z_0| < R$. Внутри этого круга возьмем произвольную точку z (рис. 9.10). Рассмотрим окружность L с центром в точке z_0 и таким радиусом $r < R$, чтобы точка z оказалась внутри контура L.

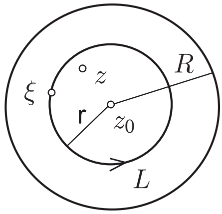

Рис. 9.10

Поскольку функция $f(z)$ — аналитична в замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant r$, то в силу интегральной формулы Коши (9.39) имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}. \tag{9.56}$$

Для доказательства теоремы достаточно разложить $\dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ в ряд по степеням $z - z_0$, а затем выполнить почленное интегрирование в формуле (9.56). Имеем

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{\dfrac{1}{\xi - z_0}}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}}.$$

Так как $|z - z_0| < |\xi - z_0|$, то $\left|\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < 1$ и, следовательно, выражение $\dfrac{\dfrac{1}{\xi - z_0}}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\dfrac{1}{\xi - z_0}$ и знаменателем $\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}$. Таким образом,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^3} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} + \ldots\ .$$

Умножая обе части этого равенства на $\dfrac{1}{2\pi i} f(\xi)$ и интегрируя его почленно по контуру L, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n$$

или, учитывая (9.56),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

Теорема доказана. □

Приведем разложения некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена):

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\ ,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\ ,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ ,$$

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots\ ,$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots\ .$$

§ 9.17. Ряд Лорана

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{9.57}$$

называется *рядом Лорана*. Первая часть ряда Лорана, т. е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{9.58}$$

называется *правильной частью ряда Лорана*, а вторая часть, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \tag{9.59}$$

называется *главной частью ряда Лорана*.

Говорят, что ряд (9.57) сходится, если сходятся оба ряда (9.58) и (9.59).

Пусть область сходимости ряда (9.58) есть круг $|z-z_0| < R$. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}t^n$, где $t = \dfrac{1}{z-z_0}$, обозначим через $\dfrac{1}{r}$. Тогда этот ряд будет сходиться в области $|t| = \dfrac{1}{|z-z_0|} < \dfrac{1}{r}$. Значит, ряд (9.58) будет сходиться вне круга $|z-z_0| > r$. Итак, если $r < R$, то область сходимости ряда Лорана (9.57) представляет собой кольцо $r < |z-z_0| < R$ (рис. 9.11).

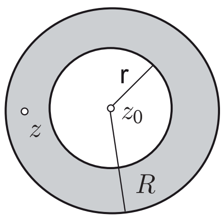

Рис. 9.11

Теорема 9.17.1 (Лоран). *Всякая аналитическая в кольце $D:\ r < |z-z_0| < R$, функция $f(z)$ в этом кольце разлагается в сходящийся ряд Лорана*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \tag{9.60}$$

коэффициенты c_n которого определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,, \tag{9.61}$$

где L — произвольная положительно-ориентированная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри данного кольца.

Доказательство. Пусть $z \in D$ — произвольная точка. В кольце D возьмем две положительно-ориентированные окружности l и L с центром в точке z_0 так, чтобы точка z была между ними (рис. 9.12).

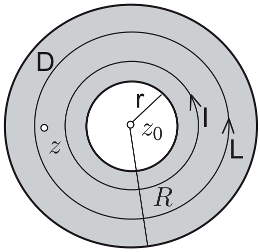

Рис. 9.12

По предположению теоремы функция $f(z)$ аналитична в кольце между окружностями l и L, а также на самих этих окружностях. Значит, в силу интегральной формулы Коши для многосвязной области

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{l^-} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z},$$

или

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{l} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}. \tag{9.62}$$

В первом интеграле $\xi \in L$, а значит, $|z - z_0| < |\xi - z_0|$, откуда $\left|\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < 1$. Следовательно, как уже было установлено в доказательстве теоремы (9.16.2), имеем разложение

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{\dfrac{1}{\xi - z_0}}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}. \tag{9.63}$$

Во втором интеграле (9.62) $\xi \in l$, поэтому $\left|\dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| < 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{\dfrac{1}{z - z_0}}{1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}. \tag{9.64}$$

Теперь подставим (9.63) и (9.64) в равенство (9.62) и проинтегрируем почленно:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{-n}} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n}} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Здесь мы учли, что интеграл от аналитической в кольце функции $\dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ по контуру L равен интегралу от этой функции по контуру l в силу интегральной теоремы Коши для многосвязной области.

Теорема полностью доказана. □

Замечание 9.17.1. Если в последней теореме взять $z_0 = 0$, $R = \infty$, то получим, что аналитическая на множестве $|z| > r$ $(0 \leqslant r < \infty)$ функция $f(z)$ разлагается в сходящийся на этом множестве ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \tag{9.65}$$

коэффициенты c_n которого определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots , \tag{9.66}$$

где L — произвольная окружность, ориентированная против часовой стрелки, с центром в точке 0 и радиуса $\rho > r$ (рис. 9.13.).

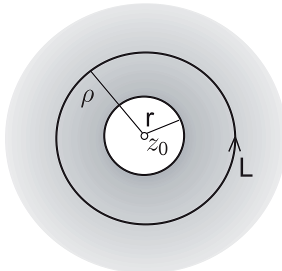

Рис. 9.13

Множество $|z| > r$ называется *окрестностью* бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

Пример 9.17.1. Функцию $f(z) = e^{1/z}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$.

Как известно, ряд Тейлора функции e^u имеет вид

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots \ .$$

Положив $u = \dfrac{1}{z}$ в этом разложении, получим

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \ldots + \frac{1}{n!\, z^n} + \ldots \ , \qquad z \neq 0.$$

Это и есть ряд Лорана функции $f(z) = e^{1/z}$ в окрестности точки $z = 0$.

Пример 9.17.2. Функцию $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности $|z| > 2$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

В области $|z| > 2$ имеем

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \ldots\right) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \ldots \ .$$

§ 9.18. Изолированные особые точки и их классификация

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0, кроме самой этой точки. Тогда точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, то точка z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$. Это название объясняется тем, что, полагая $f(z_0) = A$, мы получим функцию $f(z)$, аналитическую в рассматриваемой окрестности точки z_0, включая саму точку z_0.

Изолированная особая точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует (ни конечный, ни бесконечный), то точка z_0 называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

Пусть z_0 изолированная особая точка функции $f(z)$. Тогда существует такое число $R > 0$, что функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < R$ и, следовательно, разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \tag{9.67}$$

коэффициенты c_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, которого определяются формулой (9.61).

Справедливо утверждение: *точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта функция имеет вид*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{9.68}$$

т. е. когда ряд Лорана (9.67) *функции $f(z)$ в кольце $0 < |z - z_0| < R$ не содержит главной части*. Достаточность этого утверждения устанавливается просто, поскольку из представления (9.68) следует, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$, а это, по определению, значит, что точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$. Обратно, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, то, полагая $f(z_0) = A$, мы получим функцию $f(z)$, аналитическую в круге $|z - z_0| < R$. Но тогда в этом круге функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора, т. е. имеет вид (9.68).

Теорема 9.18.1. *Для того чтобы точка z_0 была полюсом аналитической в кольце $0 < |z - z_0| < R$ функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть z_0 — полюс функции $f(z)$. Тогда $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ и, следовательно, существует окрестность $|z - z_0| < r$ $(r < R)$ точки z_0, в которой функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству $|f(z)| > 1$. В этой окрестности функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ аналитическая, кроме, быть может, точки z_0. Однако эта точка является устранимой особой точкой функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, поскольку $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$. Следовательно, $\varphi(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = 0$, т. е. точка z_0 является нулем функции $\varphi(z)$.

Достаточность. Пусть $\varphi(z_0) = 0$. Рассмотрим окрестность $|z - z_0| < R$ точки z_0, в которой функция $\varphi(z)$ не имеет других нулей, кроме точки z_0. Тогда можем образовать функцию $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$, которая в кольце $0 < |z - z_0| < R$ будет аналитической и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Значит, точка z_0 является полюсом функции $f(z)$.

Теорема доказана. □

Последняя теорема позволяет ввести понятие *кратности* или *порядка* полюса функции.

Скажем, что точка z_0 является *полюсом кратности* m $(m \geqslant 1)$ функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка m функции $\dfrac{1}{f(z)}$. Полюс кратности $m = 1$ называется также *простым полюсом*.

Теорема 9.18.2. *Для того чтобы точка z_0 была полюсом порядка m аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана этой функции в некоторой окрестности точки z_0 имел вид*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{m} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \tag{9.69}$$

где $c_{-m} \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка z_0 — полюс порядка m функции $f(z)$. Тогда, согласно предыдущей теореме, z_0 является нулем порядка m для функции $\frac{1}{f(z)}$, а, значит, имеет место равенство

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \varphi(z), \tag{9.70}$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 функция, причем $\varphi(z_0) \neq 0$. Из (9.70) получим

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}. \tag{9.71}$$

Так как $\frac{1}{\varphi(z)}$ также является аналитической функцией в некоторой окрестности точки z_0, то ее можно разложить в степенной ряд

$$\frac{1}{\varphi(z)} = a_0 + a_1(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \ldots, \tag{9.72}$$

где $a_0 \neq 0$. Если подставить ряд (9.72) в формулу (9.71), то для функции $f(z)$ окончательно получим разложение

$$f(z) = \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \ldots,$$

которое с точностью до обозначений коэффициентов ($a_n = c_{n-m}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) совпадает с (9.69).

Достаточность. Пусть ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид (9.69). Докажем, что тогда точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$.

Разложение (9.69) перепишем в виде

$$f(z) = \frac{c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \ldots}{(z - z_0)^m},$$

откуда находим

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \cdot \frac{1}{c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \ldots},$$

где $c_{-m} \neq 0$. А это значит, что точка z_0 является нулем порядка m для функции $\frac{1}{f(z)}$. Следовательно, в силу теоремы 9.18.1 точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$.

Теорема полностью доказана. □

Из последней теоремы следует, что *точка* z_0 *является полюсом функции* $f(z)$ *тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения* (9.67) *этой функции содержит конечное число членов* (*подразумевается, с отличными от нуля коэффициентами*).

Замечание 9.18.1. Разложение (9.69) дает удобный способ определения порядка полюса z_0: *если существует конечный предел*

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) = A \neq 0,$$

то точка z_0 *есть полюс порядка* m.

Теперь обратимся к случаю существенно особой точки. Здесь справедливо утверждение: *точка* z_0 *является существенно особой точкой функции* $f(z)$ *тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения* (9.67) *этой функции содержит бесконечное множество членов*. Если точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, то главная часть лорановского разложения (9.67) этой функции действительно содержит бесконечное множество членов, поскольку в противном случае точка z_0 была бы либо устранимой особой точкой (если такие члены совсем отсутствуют), либо полюсом (если такие члены имеются только в конечном числе). Обратно, если главная часть лорановского разложения (9.67) функции $f(z)$ содержит бесконечное множество членов, то точка z_0 не может быть ни устранимой особой точкой (ибо тогда главная часть должна полностью отсутствовать), ни полюсом (ибо тогда главная часть должна содержать лишь конечное число членов).

Пример 9.18.1. Точка $z = 0$ является устранимой особой точкой функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, поскольку $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z} = 1$.

Пример 9.18.2. Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$.

Точка $z = 0$ является особой точкой данной функции и, поскольку $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim\limits_{z\to 0} z^2\dfrac{\sin z}{z^3} = 1 \neq 0$, то точка $z = 0$ является полюсом второго порядка (см. замечание 9.18.1).

Пример 9.18.3. Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{(z+4)}{z(z-1)(z+2)^2}$.

Применяя теорему 9.18.1, заключаем, что точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ — простые полюсы, а точка $z_3 = -2$ — полюс второго порядка.

Пример 9.18.4. Найти особые точки функции $f(z) = e^{1/z}$.

Заметим, что предел $\lim\limits_{z\to 0} e^{1/z}$ не существует. Действительно, если $z \to 0$ вдоль положительной полуоси x, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{1/z} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{1/x} = +\infty$. А если $z \to 0$ вдоль отрицательной полуоси x, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{1/z} = \lim\limits_{x\to 0-0} e^{1/x} = 0$.

Значит, точка $z = 0$ является существенно особой точкой функции $f(z) = e^{1/z}$.

§ 9.19. Классификация особых точек. Случай бесконечно удаленной точки

Пусть функция $f(z)$ — аналитическая во всех точках внешности круга $|z| \leqslant r$, т. е. во всех точках $|z| > r$, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

Как и в случае конечной точки z_0, точка $z = \infty$ называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$. Если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$, то точка $z = \infty$ называется *полюсом* функции $f(z)$. А если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не существует (ни конечный, ни бесконечный), то точка $z = \infty$ называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

Преобразование $z = \dfrac{1}{t}$ сводит изучение функции $f(z)$ к изучению функции $F(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, которая уже аналитическая в некоторой окрестности начала координат, кроме, быть может, самого начала координат. При этом точка $t = 0$ будет служить образом бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

Так как $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = \lim\limits_{t\to 0} f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, то *точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой, полюсом порядка m или существенно особой точкой функции $f(z)$, если точка $t = 0$ соответственно является устранимой особой точкой, полюсом порядка m или существенно особой точкой функции $F(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.*

Пусть точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$. Тогда точка $t=0$ является устранимой особой точкой функции $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$. Следовательно, лорановское разложение функции $F(t)$ в окрестности точки $t=0$ имеет вид

$$F(t)=c_0+c_{-1}t+c_{-2}t^2+\ldots\ .$$

Но поскольку $t=\frac{1}{z}$, то из этого равенства для функции $f(z)=$ $=F\left(\frac{1}{z}\right)$ в окрестности точки $z=\infty$ получим разложение

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots\ . \tag{9.73}$$

Итак, *лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$, которая является устранимой особой точкой, имеет вид* (9.73)

Точно таким же образом устанавливается, что *если точка $z=\infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$, то лорановское разложение этой функции в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$ имеет вид*

$$f(z)=c_m z^m+\ldots+c_1 z+c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots\ , \tag{9.74}$$

где $c_m\neq 0$.

Наконец, *лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$, которая является существенно особой точкой, имеет вид*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n\ , \tag{9.75}$$

где бесконечное множество коэффициентов при положительных степенях z отлично от нуля.

Таким образом, для характера особой точки $z=\infty$ определяющее значение имеет совокупность членов с положительными степенями в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$. По этой причине *главной частью* ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$, а *правильной частью* — ряд $\sum\limits_{n=0}^{-\infty} c_n z^n$.

Пример 9.19.1. Выяснить характер особенности функции $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$.

Так как предел $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{z-1} = 0$ конечен, то точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$.

§ 9.20. Понятие вычета. Теорема о вычетах

Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в некотором круге $|z - z_0| < R$ за исключением, быть может, точки z_0.

Определение 9.20.1. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(z)\,dz$, где L — контур в кольце $0 < |z - z_0| < R$, ориентированный положительно, т. е. против часовой стрелки.

Вычет функции $f(z)$ в точке z_0 обозначается символом $\operatorname{Res} f(z_0)$ или $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$. Итак, по определению

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(z)\,dz. \tag{9.76}$$

Согласно теореме 9.17.1 функция $f(z)$ в кольце $0 < |z - z_0| < R$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{9.77}$$

коэффициенты c_n которого определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Полагая $n = -1$ в последней формуле, получим

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(z)\,dz,$$

то есть,

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}. \tag{9.78}$$

Таким образом, *вычет функции $f(z)$ в точке z_0 — это коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0*.

Если функция $f(z)$ — аналитическая в некоторой окрестности $|z| > R$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$ (за исключением, быть может, самой этой точки), а ориентированный против часовой стрелки контур L лежит в этой окрестности (рис. 9.14), то вычетом функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ называется

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L^-} f(z)\,dz, \tag{9.79}$$

где L^- — тот же контур L, но ориентированный по часовой стрелке. Эту ориентацию по отношению к бесконечно удаленной точки $z = \infty$ можно считать положительной, поскольку при обходе по контуру L^- точка $z = \infty$ остается слева, в точности так, как при обходе по контуру L точка 0 остается слева.

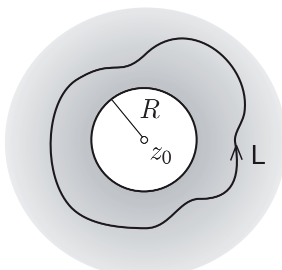

Рис. 9.14

В окрестности $|z| > R$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$ функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана (см. замечание 9.17.1):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

коэффициенты c_n которого определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Из последнего равенства имеем

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} f(z)\,dz.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^-} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} f(z)\,dz = -c_{-1}.$$

Итак,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \tag{9.80}$$

То есть, *вычет функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z=\infty$ — это взятый со знаком минус коэффициент при z^{-1} лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$.*

Теорема 9.20.1 (Коши о вычетах). *Пусть функция $f(z)$, аналитическая на замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной положительно-ориентированным контуром L,* за исключением конечного числа изолированных особых точек z_0, z_1, $\ldots z_n$, *лежащих внутри области D. Тогда*

$$\int\limits_L f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k). \tag{9.81}$$

Доказательство. Опишем около каждой из точек z_k $(k=1,2,\ldots,n)$ положительно-ориентированную окружность L_k столь малого радиуса, чтобы эта окружность лежала внутри контура L и чтобы каждая из них лежала во внешности всех остальных (рис. 9.15).

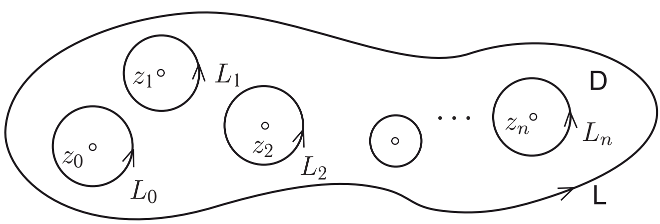

Рис. 9.15

Тогда по теореме 9.11.3

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{L_k} f(z)\,dz. \tag{9.82}$$

Но поскольку $\int\limits_{L_k} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res} f(z_k)$ (см. (9.76)), то из равенства (9.82) окончательно получим

$$\int\limits_{L} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i\,\mathrm{Res}\,f(z_k) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,f(z_k).$$

Теорема доказана. □

Замечание 9.20.1. Учитывая определение вычета в бесконечно удаленной точке (см. (9.79)), формулу (9.81) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \tag{9.83}$$

§ 9.21. Вычисление вычетов

Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в кольце $0 < |z - z_0| < R$. Так как

$$\mathrm{Res}\,f(z_0) = c_{-1},$$

то для нахождения вычета функции $f(z)$ в точке z_0 достаточно знать разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

Пример 9.21.1. Найти вычет функции $f(z) = e^{1/z}$ в точке $z = 0$.

Поскольку ряд Лорана данной функции в окрестности существенно особой точки $z = 0$ имеет вид (см. пример 9.17.1)

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots + \frac{1}{n!\,z^n} + \ldots\ ,$$

то $\operatorname*{Res}_{z=0} e^{1/z} = c_{-1} = 1$.

Если z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\mathrm{Res}\,f(z_0) = 0$, так как ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности устранимой особой точки z_0 не содержит главной части (а поэтому $c_{-1} = 0$).

Однако заметим, что *вычет функции относительно устранимой особой точки $z = \infty$*, *вообще говоря*, *может отличаться от нуля*, поскольку в этом случае лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ имеет вид (см. параграф § 9.19)

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots \ .$$

Пример 9.21.2. Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$.

Ряд Лорана функции $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ в окрестности $|z| > 2$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$ имеет вид (см. пример (9.17.2))

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \ldots \ .$$

Следовательно, $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} \dfrac{1}{z-2} = c_{-1} = 1$. Хотя, как нетрудно заметить, точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ (ведь существует конечный предел $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{z-2} = 0$).

Вычет функции $f(z)$ в точке z_0 вычисляется без труда, если z_0 — простой полюс этой функции. Действительно, тогда лорановское разложение функции $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots \ .$$

Следовательно,

$$(z-z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \ldots \ ,$$

откуда и получается следующая формула вычисления вычета в случае, когда z_0 является простым полюсом:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z\to z_0} [(z-z_0)f(z)]. \tag{9.84}$$

Последняя формула позволяет получить более удобную формулу вычисления вычета в случае, когда функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет простой нуль при $z = z_0$, то есть $\psi(z_0) = 0$, а $\psi'(z_0) \neq 0$. Действительно, при этих предположениях точка z_0 является простым полюсом функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и, следовательно, согласно формуле (9.84) имеем

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

то есть,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{9.85}$$

Теперь предположим, что точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$. Тогда лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots,$$

где $c_{-m} \neq 0$, откуда,

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \ldots .$$

Дифференцируя последнее равенство $(m-1)$ раз получим

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] =$$

$$+ (m-1)!\, c_{-1} + m\cdot(m-1)\times\ \ldots\ \times 2\cdot c_0(z-z_0) + \ldots .$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $z \to z_0$:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = (m-1)!\, c_{-1}.$$

Отсюда и получается следующая формула вычисления вычета функции $f(z)$ в случае, когда z_0 есть полюс порядка m:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]. \tag{9.86}$$

Пример 9.21.3. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$ в ее изолированных особых точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$.

Точка $z_1 = 0$ является полюсом второго порядка, а $z_2 = 1$ — простым полюсом данной функции. По формуле (9.85) имеем

$$\operatorname{Res} f(1) = \left.\frac{z+1}{[z^2(z-1)]'}\right|_{z=1} = \left.\frac{z+1}{3z^2-2z}\right|_{z=1} = 2.$$

Вычет в точке $z_1 = 0$ вычислим по формуле (9.86):

$$\operatorname{Res} f(0) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left[(z-0)^2\frac{z+1}{z^2(z-1)}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[\frac{z+1}{z-1}\right]' = \lim_{z\to 0}\frac{-2}{(z-1)^2} = -2.$$

§ 9.22. Применение вычетов к вычислению интегралов

Теорема Коши 9.20.1 о вычетах часто используется для вычисления интегралов от функций комплексного переменного по замкнутому контуру.

Пример 9.22.1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_L \frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)z^2}\,dz,$$

где L — окружность $|z-1| = 2$.

Внутри контура L подынтегральная функция $f(z) = = \dfrac{z^2+1}{(z-1)(z+2)z^2}$ имеет две особые точки: $z = 1$ — простой полюс и $z = 0$ — двойной полюс. Следовательно, по формуле (9.81) имеем

$$\int\limits_L \frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)z^2}\,dz = 2\pi i\,[\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(1)].$$

Вычет в двойном полюсе $z = 0$ вычислим по формуле (9.86):

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)z^2}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{2z(z-1)(z+2)-(z^2+1)(2z+1)}{(z-1)^2(z+2)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Вычет в простом полюсе $z = 1$ вычислим по формуле (9.84):

$$\operatorname{Res} f(1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)z^2} = \lim_{z\to 1}\frac{z^2+1}{(z+2)z^2} = \frac{2}{3}.$$

Итак,

$$\int\limits_L \frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)z^2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi i}{6}.$$

Пример 9.22.2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_L z^2 e^{1/z}\,dz,$$

где L — окружность $|z| = 1$.

Подынтегральная функция $f(z) = z^2e^{1/z}$ внутри окружности $|z| = 1$ имеет единственную особую точку $z = 0$. Разложим эту функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ (см. пример 9.17.1):

$$z^2e^{1/z} = z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\ldots\right) = z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!\,z}+\ldots\ .$$

Это разложение показывает, что точка $z = 0$ является существенно особой точкой функции $f(z) = z^2e^{1/z}$, причем $\operatorname{Res} f(0) = c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$. Следовательно, в силу формулы (9.81) получим

$$\int\limits_L z^2e^{1/z}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(0) = \frac{\pi i}{3}.$$

Теорема Коши 9.20.1 *о вычетах применяется также для вычисления определенных интегралов.*

Рассмотрим интеграл вида

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx,$$

где $R(\cos x, \sin x)$ — рациональная функция своих аргументов.

Заменой $z = e^{ix}$ последний интеграл сводится к интегралу по единичной окружности от функции комплексного переменного. Действительно, при изменении x от 0 до 2π переменная $z = e^{ix}$ пробегает в положительном направлении окружность $|z| = 1$.

И поскольку $dz = ie^{ix}\,dx$, или $dx = -i\dfrac{dz}{z}$, то, учитывая формулы Эйлера

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

получим

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx = -i \int_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{z}.$$

Теперь к последнему интегралу можно применить теорему Коши 9.20.1 о вычетах.

Пример 9.22.3. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 3\cos x)^2}.$$

Применим подстановку $z = e^{ix}$. Тогда $dx = -i\,\dfrac{dz}{z}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 3\cos x)^2} = -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z\left[5 + \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^2} =$$

$$= \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(3z^2 + 10z + 3)^2} = \frac{4}{9i}\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 (z+3)^2}.$$

Внутри единичного круга находится только полюс второго порядка $z = -\dfrac{1}{3}$. Вычет подынтегральной функции относительно этого полюса вычислим по формуле (9.86):

$$\operatorname*{Res}_{z=-1/3} \frac{z}{\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 (z+3)^2} =$$

$$= \lim_{z\to -1/3}\left[\left(z+\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{z}{\left(z+\frac{1}{3}\right)^2(z+3)^2}\right]' = \lim_{z\to -1/3}\left[\frac{z}{(z+3)^2}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to -1/3}\frac{(z+3)^2-2z(z+3)}{(z+3)^4} = \lim_{z\to -1/3}\frac{3-z}{(z+3)^3} = \frac{45}{256}.$$

В силу формулы (9.81) получим

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(5+3\cos x)^2} = \frac{4}{9i}\int_{|z|=1}\frac{z\,dz}{\left(z+\frac{1}{3}\right)^2(z+3)^2} =$$

$$= \frac{4}{9i}\cdot 2\pi i\cdot\mathop{\mathrm{Res}}_{z=-1/3} f(z) = \frac{8\pi}{9}\cdot\frac{45}{256} = \frac{5\pi}{32}.$$

Следующая теорема дает способ вычисления интеграла вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

посредством вычетов функции $f(z)$.

Теорема 9.22.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости* $\mathrm{Im}z \geqslant 0$, *за исключением конечного числа особых точек* z_1, z_2, …, z_n. *Если*

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^m}, \tag{9.87}$$

при всех $|z| \geqslant R$, где $m \geqslant 2$, а R — достаточно большое число, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathop{\mathrm{Res}}_{z=z_k} f(z). \tag{9.88}$$

Доказательство. Опишем положительно ориентированную полуокружность L с центров в точке O такую, чтобы все особые точки z_1, z_2, …, z_n функции $f(z)$ лежали внутри этой полуокружности (рис. 9.16).

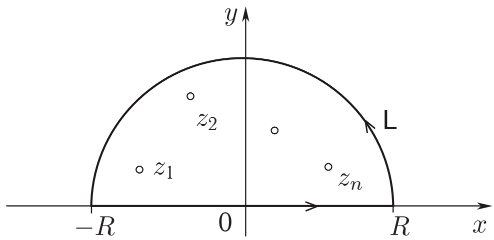

Рис. 9.16

Тогда по теореме Коши 9.20.1 о вычетах имеем

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{9.89}$$

Пользуясь неравенством (9.87), при $|z| \geqslant R$ оценим

$$\left| \int_L f(z)\,dz \right| \leqslant \int_L |f(z)|\,dz \leqslant \frac{M}{|z|^m} \int_L dz \leqslant \frac{M}{R^m}\,\pi R = \frac{\pi M}{R^{m-1}},$$

откуда следует, что при $R \to \infty$ интеграл $\int\limits_L f(z)\,dz$ стремится к нулю ($m-1 \geqslant 1$).

Теперь для завершения доказательства формулы (9.88) осталось в равенстве (9.89) перейти к пределу при $R \to \infty$.

Теорема доказана. □

Пример 9.22.4. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Заметим, что функция $f(z) = \dfrac{dz}{1+z^4}$ аналитична в верхней полуплоскости $\mathrm{Im} z \geqslant 0$, за исключением особых точек $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, в которых она имеет простые полюсы. Кроме того, $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{|z|^4}$. Итак, выполнены все условия предыдущей теоремы. Значит,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{1+z^4} \right).$$

Указанные вычеты вычислим по формуле (9.85):

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{1+z^4} = \left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}} = \frac{1}{-4e^{-\pi i/4}} = -\frac{1}{4}\, e^{\pi i/4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{1+z^4} = \left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z=z_2} = \frac{1}{4e^{9\pi i/4}} = \frac{1}{4e^{\pi i/4}} = \frac{1}{4}\, e^{-\pi i/4}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{2\pi i}{4}\left(-e^{\pi i/4} + e^{-\pi i/4}\right) = \pi \cdot \frac{e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}}{2i} =$$

$$= \pi \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi.$$

Теорема 9.22.2. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\mathrm{Im} z \geqslant 0$, за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, …, z_n. Если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ равномерно относительно* $\arg z$, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)e^{iz}. \tag{9.90}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.22.1 и основывается на следующей *лемме Жордана*, которая утверждает: *в предположениях последней теоремы справедливо соотношение*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{L_R} f(z)e^{i\lambda z}\, dz = 0,$$

где $\lambda > 0$ — любое действительное число, а L_R — полуокружность с центром в начале координат радиуса R .

Теорема 9.22.2 часто применяется для вычисления интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\, dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\, dx,$$

так как эти интегралы являются соответственно действительной и мнимой частями интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx$, который вычисляется по формуле (9.90).

Пример 9.22.5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{1+x^2}.$$

Функция $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ в верхней полуплоскости имеет простой полюс в точке $z = i$ и удовлетворяет всем условиям теоремы 9.22.2. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = 2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{1+z^2} = 2\pi i\cdot \frac{e^{i\cdot i}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

(вычет $\operatorname*{Res}\limits_{z=i} \dfrac{e^{iz}}{1+z^2} = \dfrac{1}{2ie}$ был вычислен по формуле (9.85)). Выделяя действительную часть, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ